

Sur l'énumération des cartes à bords géodésiques

Jérémy Bouttier

D'après des travaux en collaboration avec Emmanuel Guitter, Grégory Miermont, et Hugo Manet

IMJ-PRG, Sorbonne Université

Colloque Géométries aléatoires et applications – Collège de France
Mercredi 29 janvier 2025

Plan

- 1 Introduction : définitions, histoire et motivations
- 2 Bijection CVS/BDG entre cartes planaires et arbres étiquetés
- 3 Cartes à bords géodésiques : résultats généraux
- 4 Une approche bijective dans le cas des pantalons
- 5 Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

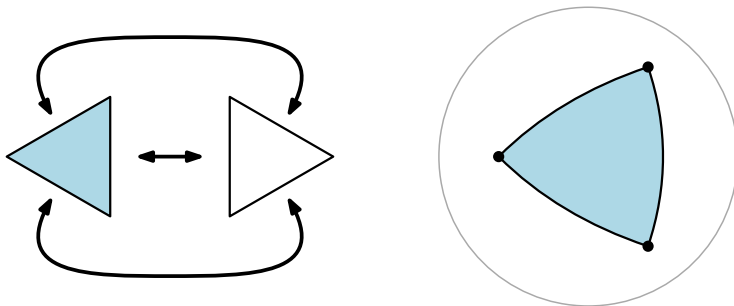
Plan

- 1 Introduction : définitions, histoire et motivations
- 2 Bijection CVS/BDG entre cartes planaires et arbres étiquetés
- 3 Cartes à bords géodésiques : résultats généraux
- 4 Une approche bijective dans le cas des pantalons
- 5 Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

Qu'est-ce qu'une carte combinatoire ?

Une **carte** est un objet combinatoire ayant plusieurs définitions équivalentes :

- surface obtenue par le recollement de polygones réguliers,
- plongement cellulaire d'un graphe dans une surface, à homéomorphisme près,
- etc.

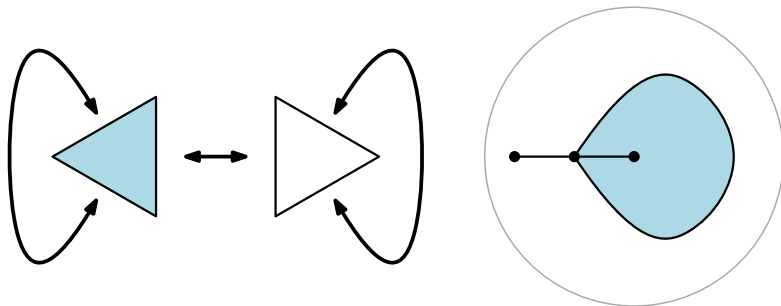


Une carte est constituée de **sommets**, d'**arêtes**, et de **faces**.

Qu'est-ce qu'une carte combinatoire ?

Une **carte** est un objet combinatoire ayant plusieurs définitions équivalentes :

- surface obtenue par le recollement de polygones réguliers,
- plongement cellulaire d'un graphe dans une surface, à homéomorphisme près,
- etc.

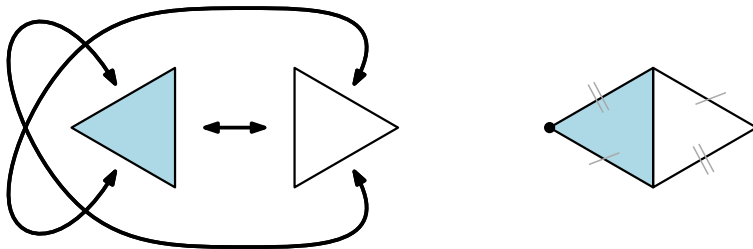


Une carte est constituée de **sommets**, d'**arêtes**, et de **faces**.

Qu'est-ce qu'une carte combinatoire ?

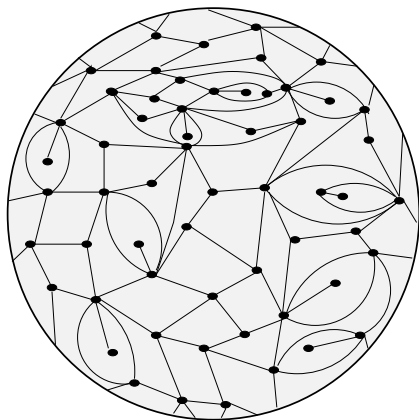
Une **carte** est un objet combinatoire ayant plusieurs définitions équivalentes :

- surface obtenue par le recollement de polygones réguliers,
- plongement cellulaire d'un graphe dans une surface, à homéomorphisme près,
- etc.



Une carte est constituée de **sommets**, d'**arêtes**, et de **faces**.

Cartes planaires



Dans cet exposé, nous considérerons principalement des cartes **planaires**, dessinées sur la sphère ou dans le plan au prix du choix d'une face externe.

Plus généralement on peut considérer des cartes dessinées sur des surfaces closes, orientables ou non.

On a la relation d'Euler

$$\#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\} = \chi$$

où χ est la caractéristique d'Euler (2 pour la sphère).

Un **bord** est une face qu'on choisit de distinguer.



W.T. Tutte
(1917-2002)

Théorème (Tutte, 1963)

Le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est

$$\frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n} = \frac{2 \cdot 3^n}{n+2} \text{Cat}(n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{12^n}{n^{5/2}}$$

où $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ est le n -ième nombre de Catalan.

Voir suite A000168 de l'*Online Encyclopedia of Integer Sequences* :

1, 2, 9, 54, 378, 2916, 24057, 208494, ...

NB : par carte enracinée on entend qu'une arête est marquée et orientée.

Énumérer les cartes



W.T. Tutte
(1917-2002)

La formule précédente est en fait une conséquence du résultat suivant :

Théorème (formule des *slicings* de Tutte, 1962)

Le nombre de cartes planaires biparties enracinées, ayant exactement f_i faces de degré $2i$ pour tout $i \geq 1$, est égal à

$$\frac{2 \cdot e!}{v!} \prod_{i \geq 1} \frac{1}{f_i!} \binom{2i-1}{i}^{f_i}$$

où $e = \sum if_i$ et $v = \sum (i-1)f_i + 2$ sont les nombres d'arêtes et de sommets.

NB : par carte planaire bipartie on entend que toutes les faces ont degré pair.

Le résultat précédent est retrouvé en prenant $f_4 = n$ et les autres f_i nuls, ce qui revient à compter les **quadrangulations** à n faces, en bijection avec les cartes à n arêtes.

Un mot sur l'approche de Tutte

L'approche de Tutte utilise des **séries génératrices** déterminées par des **équations fonctionnelles**.

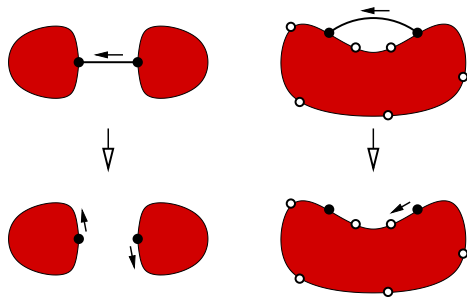
Par exemple, pour les cartes planaires enracinées, on considère la série génératrice bivariable

$$F(t, u) = \sum_{n,k} F_{n,k} t^n u^k$$

où $F_{n,k}$ est le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes avec une face externe de degré k . Cette série est déterminée par l'équation fonctionnelle

$$F(t, u) = 1 + tu^2 F(t, u)^2 + tu \frac{F(t, u) - F(t, 1)}{u - 1}.$$

La variable u est dite **catalytique** : elle n'est pas utile a priori mais permet la réaction l'équation.

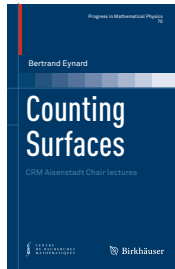


Les équations de Tutte aujourd'hui



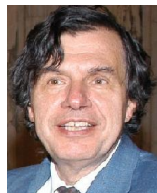
L'approche des **équations de Tutte** peut être adaptée pour énumérer bien d'autres familles de cartes. Voir notamment les travaux de Mireille Bousquet-Mélou *et al.* donnant des méthodes à la fois théoriques et effectives pour résoudre des équations fonctionnelles à une ou deux variables catalytiques.

Les équations de Tutte permettent également d'énumérer les cartes sur des surfaces non planaires, par récurrence sur (l'opposé de) la caractéristique d'Euler. Elles sont équivalentes aux équations de boucle (ou Schwinger-Dyson) apparaissant dans le contexte des **intégrales matricielles**. Leur résolution a motivé le développement de la théorie de la **récurrence topologique**.



Un mot sur les intégrales matricielles

Une approche initiée par 't Hooft (1972) et Brézin, Itzykson, Parisi et Zuber (1978).



3. Combinatorics of Quartic Vertices

1) Vacuum Diagrams

Setting each diagram equal to unity, apart from the overall weight, is equivalent to treat a field theory in zero dimension, in which space-time is reduced to one or to a finite number of points. It means that

$$\exp - N^2 E^{(0)}(g) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^{N^2} M \exp - \left[\frac{1}{2} \text{tr} M^2 + \frac{g}{N} \text{tr} M^4 \right]. \quad (3)$$

The integration measure on hermitian matrices is

$$d^{N^2} M \equiv \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} d(\text{Re} M_{ij}) d(\text{Im} M_{ij}) \quad (4)$$

Gravité quantique bidimensionnelle

A. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, 1981 :

“There are methods and formulae in science, which serve as master-keys to many apparently different problems. The resources of such things have to be refilled from time to time. In my opinion at the present time we have to develop an art of handling sums over random surfaces.”



Gravité quantique bidimensionnelle



A. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, 1981 :

“There are methods and formulae in science, which serve as master-keys to many apparently different problems. The resources of such things have to be refilled from time to time. In my opinion at the present time we have to develop an art of handling sums over random surfaces.”

Plusieurs approches ont été proposées et développées depuis :

- gravité quantique de Liouville et théories conformes (CFT),
- gravité topologique, liée à la géométrie énumérative,
- approche par discrétisation : **cartes aléatoires** et intégrales de matrices.

Gravité quantique bidimensionnelle



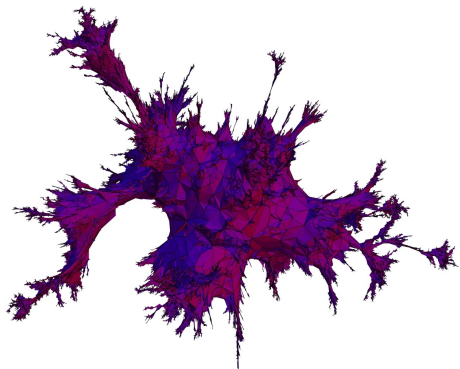
A. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, 1981 :

“There are methods and formulae in science, which serve as master-keys to many apparently different problems. The resources of such things have to be refilled from time to time. In my opinion at the present time we have to develop an art of handling sums over random surfaces.”

Plusieurs approches ont été proposées et développées depuis :

- gravité quantique de Liouville et théories conformes (CFT),
- gravité topologique, liée à la géométrie énumérative,
- approche par discrétisation : **cartes aléatoires** et intégrales de matrices.

Ces approches sont supposées être «équivalentes», mais formaliser ceci mathématiquement reste une question largement ouverte.



Une grande carte aléatoire
(figure par J. Bettinelli)

L'ensemble des cartes étant dénombrable, il est facile de le munir de mesures de probabilité, par exemple la mesure uniforme sur les quadrangulations planaires à n faces.

Les grandes cartes aléatoires ($n \rightarrow \infty$) font l'objet de nombreux travaux, avec deux points de vue principaux :

- **limite d'échelle** : on redimensionne la longueur des arêtes de façon à «tendre» vers une surface continue aléatoire,
- **limite locale** : on garde chaque arête de longueur unité de façon à «tendre» une carte aléatoire infinie. Cf Angel-Schramm, Curien..., pour le cas planaire, Budzinski-Louf pour le cas de «grand genre».

Deux exemples de résultats sur la limite d'échelle

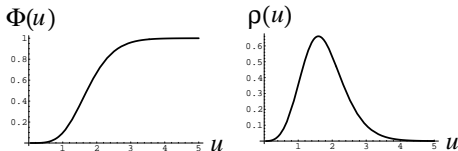
Théorème (Le Gall/Miermont 2013)

Soit Q_n une quadrangulation plane uniforme à n faces, $V(Q_n)$ son ensemble de sommets, et d_n la distance de graphe sur $V(Q_n)$. Alors l'espace métrique $(V(Q_n), \frac{d_n}{n^{1/4}})$ converge en distribution lorsque $n \rightarrow \infty$ vers un espace métrique aléatoire compact appelé **carte brownienne**.

Théorème (B., Di Francesco, Guitter 2003)

Soit D_n la distance entre deux sommets uniformes de Q_n . Alors pour tout $u > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n \left(\frac{D_n}{n^{1/4}} \leq u \right) = \Phi(u) := \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt t^2 e^{-t^2} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{3}{\sinh^2(\sqrt{3t/2} e^{i\pi/4} u)} \right).$$



Cartes aléatoires : perspectives

Si les propriétés géométriques des cartes planaires «non décorées» sont plutôt bien comprises, il y a encore beaucoup à faire selon moi dans les directions suivantes :

- cartes planaires **décorées** par un modèle de physique statistique (Ising, Potts, $O(n)$...) : la physique théorique prédit que leurs propriétés géométriques à grande échelle sont modifiées lorsque le modèle est critique.
- cartes de **genre supérieur** : peut-on développer une formulation bijective/probabiliste de la récurrence topologique ?
- généralisations en dimension supérieure, liées aux modèles de tenseurs colorés (Rivasseau, Gurau, Tanasa, Bonzom...) : à ma connaissance on ne sait pas obtenir de limites d'échelle vraiment intéressantes.

Cartes aléatoires : perspectives

Si les propriétés géométriques des cartes planaires «non décorées» sont plutôt bien comprises, il y a encore beaucoup à faire selon moi dans les directions suivantes :

- cartes planaires **décorées** par un modèle de physique statistique (Ising, Potts, $O(n)$...) : la physique théorique prédit que leurs propriétés géométriques à grande échelle sont modifiées lorsque le modèle est critique.
- cartes de **genre supérieur** : peut-on développer une formulation bijective/probabiliste de la récurrence topologique ?
- généralisations en dimension supérieure, liées aux modèles de tenseurs colorés (Rivasseau, Gurau, Tanasa, Bonzom...) : à ma connaissance on ne sait pas obtenir de limites d'échelle vraiment intéressantes.

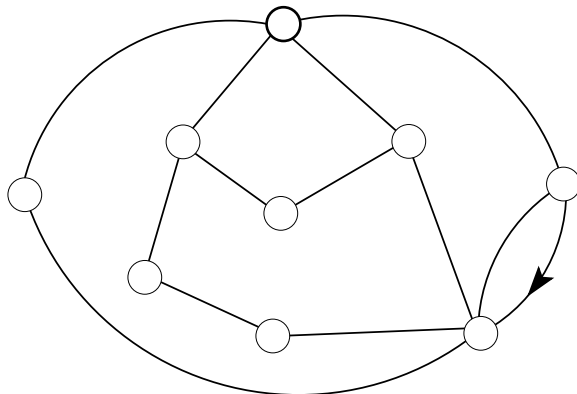
Dans la suite de cet exposé, je parlerai de travaux visant à mieux comprendre le genre supérieur.

Plan

- 1 Introduction : définitions, histoire et motivations
- 2 Bijection CVS/BDG entre cartes planaires et arbres étiquetés**
- 3 Cartes à bords géodésiques : résultats généraux
- 4 Une approche bijective dans le cas des pantalons
- 5 Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

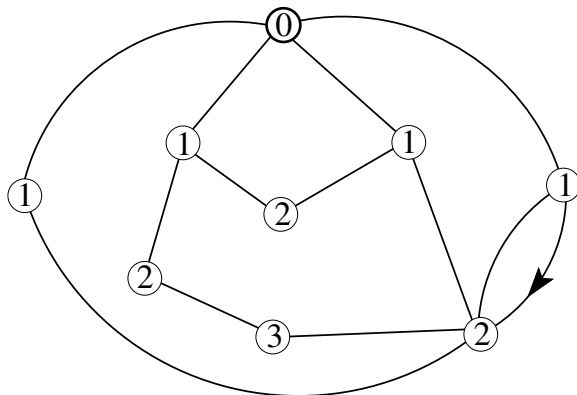
The mobiles/BDG bijection [B.-Di Francesco-Guitter 2004] generalizing [Schaeffer *et al.* 1998]

Start from a planar bipartite map with one marked vertex (**origin**) and one marked edge (**root**).



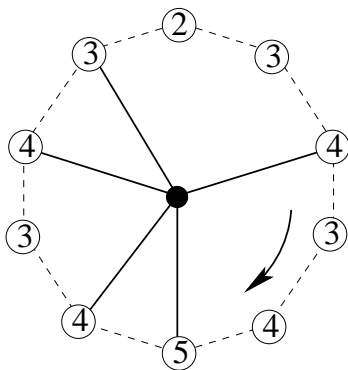
The mobiles/BDG bijection [B.-Di Francesco-Guitter 2004] generalizing [Schaeffer *et al.* 1998]

Start from a planar bipartite map with one marked vertex (**origin**) and one marked edge (**root**).

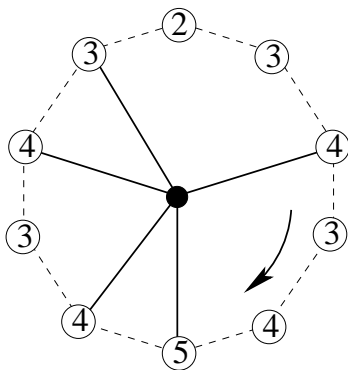


We label all the vertices by their **graph distance** from the origin. As the map is assumed bipartite, labels of adjacent vertices differ by **exactly one**.

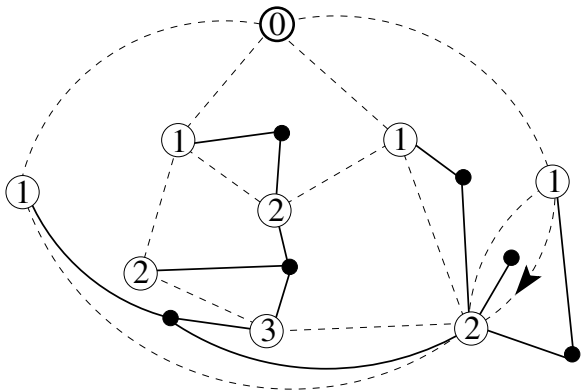
We apply the following **local rule** : independently within each face, add a new unlabeled vertex, and connect it by a new edge to each labeled vertex which is followed by a vertex with smaller label in when turning clockwise. Then, erase the edges of the original map.

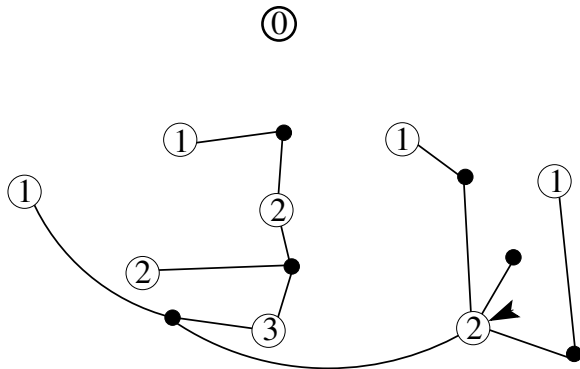


We apply the following **local rule** : independently within each face, add a new unlabeled vertex, and connect it by a new edge to each labeled vertex which is followed by a vertex with smaller label in when turning clockwise. Then, erase the edges of the original map.



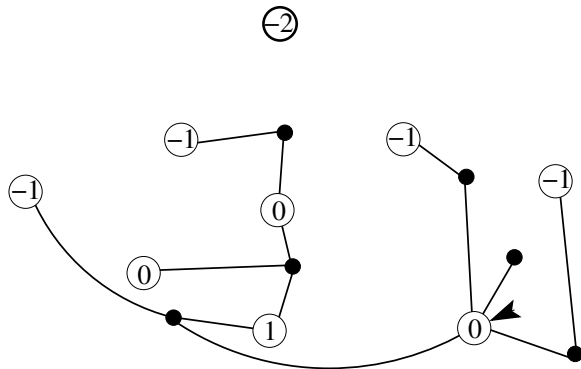
By construction, a face of degree $2k$ yields an unlabeled vertex of degree k . When turning clockwise around such vertex, adjacent labels cannot decrease by more than one at each step.





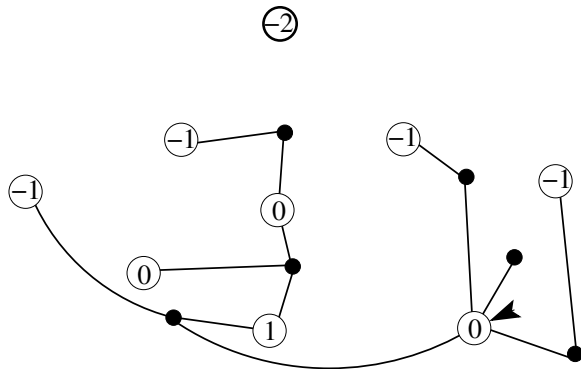
Apart from the origin which remains isolated, we obtain a plane tree called **mobile**.

This tree is rooted thanks to the root edge in the initial map. The root label d corresponds, in the initial map, to the graph **distance** between the origin and the root vertex.



Apart from the origin which remains isolated, we obtain a plane tree called **mobile**.

This tree is rooted thanks to the root edge in the initial map. The root label d corresponds, in the initial map, to the graph **distance** between the origin and the root vertex. It is convenient to subtract d from all labels so that the root label is 0. The minimal label in the mobile is then $-d + 1$.



Apart from the origin which remains isolated, we obtain a plane tree called **mobile**.

This tree is rooted thanks to the root edge in the initial map. The root label d corresponds, in the initial map, to the graph **distance** between the origin and the root vertex. It is convenient to subtract d from all labels so that the root label is 0. The minimal label in the mobile is then $-d + 1$. This is a **bijection**.

Application to enumeration

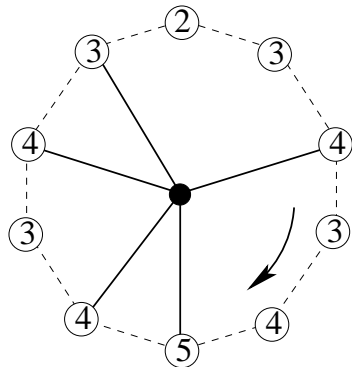
From the bijection and using textbook results on tree enumeration, it is almost immediate to recover Tutte's slicings formula for the number of rooted bipartite planar maps with given face degrees :

$$\frac{2 \cdot e!}{v!} \prod_{i \geq 1} \frac{1}{f_i!} \binom{2i-1}{i}^{f_i}.$$

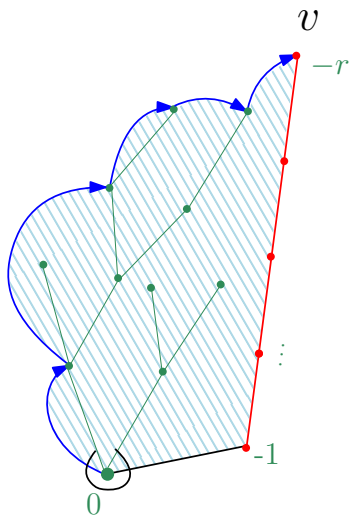
Equivalently we find that the generating function R of bipartite planar maps with one marked vertex and one marked edge satisfies

$$R = t + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{2i-1}{i} g_{2i} R^i$$

with t weight per vertex and g_{2i} weight per face of degree $2i$.



A reformulation of tree bijections : slice decomposition



Trees are easier than maps to study thanks to their **recursive** structure.

Over the recent years, I have been working on implementing this recursive structure directly at the level of maps : I call this approach **slice decomposition**.

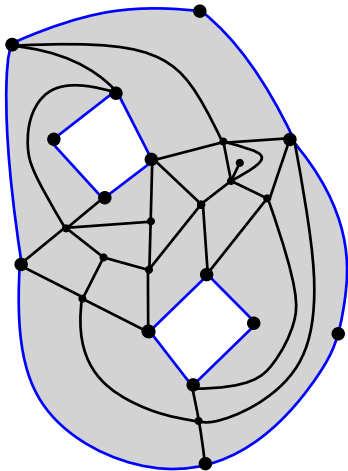
In a nutshell, it amounts to cutting maps along **geodesics**.

So far, it works very well in the planar case, but I would like to extend it to higher genus...

Plan

- 1 Introduction : définitions, histoire et motivations
- 2 Bijection CVS/BDG entre cartes planaires et arbres étiquetés
- 3 Cartes à bords géodésiques : résultats généraux**
- 4 Une approche bijective dans le cas des pantalons
- 5 Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

Maps with boundaries



A planar map with three boundaries of lengths 4, 4, 6.

Recall that **boundaries** are distinguished faces.

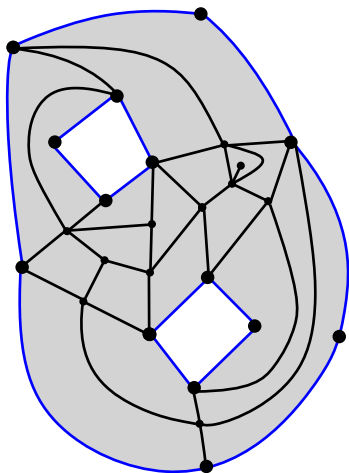
We denote by $F_{L_1, \dots, L_n}^{(g)}$ the generating function of maps of genus g with n boundaries of lengths L_1, \dots, L_n (which are rooted : an incident edge is marked ; same weighting as before except no weight for boundaries).

Equivalently we may form the grand generating function

$$W_n^{(g)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{L_1, \dots, L_n \geq 1} \frac{F_{L_1, \dots, L_n}^{(g)}}{x_1^{L_1+1} \dots x_n^{L_n+1}}.$$

These quantities are determined recursively by Tutte's equation/topological recursion ($\chi = 2 - 2g - n$). They may all be expressed in terms of the "master" series R introduced before.

Example : pairs of pants ($g = 0, n = 3$)



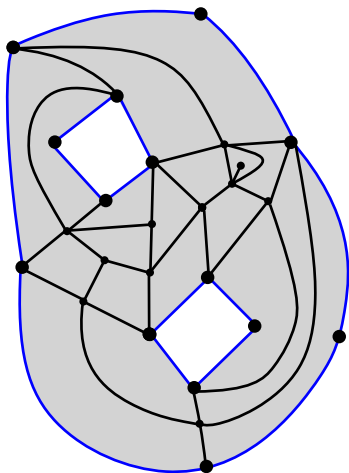
A planar map with three boundaries of lengths 4, 4, 6.

Theorem (Eynard, Collet-Fusy 2012)

For even L_1, L_2, L_3 we have

$$F_{L_1, L_2, L_3}^{(0)} = \prod_{i=1}^3 L_i \binom{L_i - 1}{L_i/2} \times R^{\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}} \frac{\partial \ln(R)}{\partial t}.$$

Example : pairs of pants ($g = 0, n = 3$)



A planar map with three boundaries of lengths 4, 4, 6.

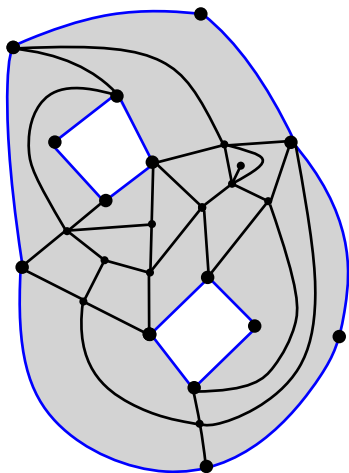
Theorem (Eynard, Collet-Fusy 2012)

For even L_1, L_2, L_3 we have

$$F_{L_1, L_2, L_3}^{(0)} = \prod_{i=1}^3 L_i \binom{L_i - 1}{L_i/2} \times R^{\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}} \frac{\partial \ln(R)}{\partial t}.$$

Let us say that a boundary is **tight** if it has minimal length in its homotopy class (it is “geodesic”). Denote by $T_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(g)}$ the generating function of maps of genus g with n unrooted tight boundaries of lengths ℓ_1, \dots, ℓ_n .

Example : pairs of pants ($g = 0, n = 3$)



A planar map with three boundaries of lengths 4, 4, 6.

Theorem (Eynard, Collet-Fusy 2012)

For even L_1, L_2, L_3 we have

$$F_{L_1, L_2, L_3}^{(0)} = \prod_{i=1}^3 L_i \binom{L_i - 1}{L_i/2} \times R^{\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}} \frac{\partial \ln(R)}{\partial t}.$$

Let us say that a boundary is **tight** if it has minimal length in its homotopy class (it is “geodesic”). Denote by $T_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(g)}$ the generating function of maps of genus g with n unrooted tight boundaries of lengths ℓ_1, \dots, ℓ_n .

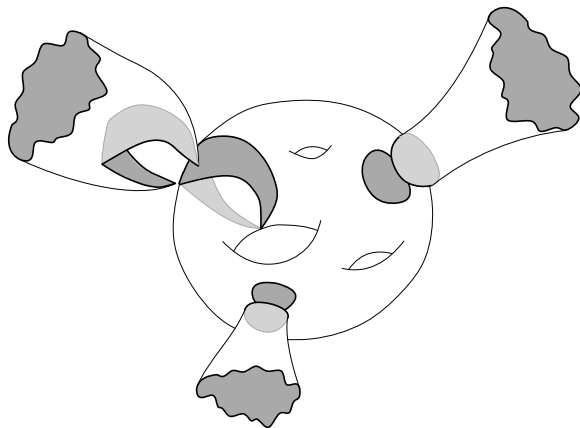
Theorem (B., Guitter, Miermont 2022)

For even ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 not all zero we have

$$T_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}^{(0)} = R^{\frac{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{2}} \frac{\partial \ln(R)}{\partial t}.$$

Trumpet decomposition

The two formulas are equivalent to one another by what we call “trumpet decomposition”, which actually holds for any g, n such that $2 - 2g - n \leq 0$.



NB : a similar idea appears in the context of JT gravity, a recent model of theoretical physics building on hyperbolic geometry (Saad, Shenker, Stanford 2019).

Trumpet decomposition

Theorem (B., Guitter, Miermont 2024)

We have

$$F_{L_1, \dots, L_n}^{(g)} = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_n \geq 1} A_{L_1, \ell_1} \cdots A_{L_n, \ell_n} \ell_1 \cdots \ell_n T_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(g)}$$

where, for maps with even degrees, $A_{L, \ell} = \binom{L}{\frac{L-\ell}{2}} R^{\frac{L-\ell}{2}}$ if $L - \ell$ even, 0 otherwise.

The quantity $A_{L, \ell}$ is the generating function for “trumpets” : planar maps with two boundaries of length L, ℓ , the latter forming the unique non contractible cycle of length ℓ .

Trumpet decomposition

Theorem (B., Guitter, Miermont 2024)

We have

$$F_{L_1, \dots, L_n}^{(g)} = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_n \geq 1} A_{L_1, \ell_1} \cdots A_{L_n, \ell_n} \ell_1 \cdots \ell_n T_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(g)}$$

where, for maps with even degrees, $A_{L, \ell} = \left(\frac{L-\ell}{2}\right) R^{\frac{L-\ell}{2}}$ if $L - \ell$ even, 0 otherwise.

The quantity $A_{L, \ell}$ is the generating function for “trumpets” : planar maps with two boundaries of length L, ℓ , the latter forming the unique non contractible cycle of length ℓ .

The trumpet decomposition can be reformulated as follows : for

$$W_n^{(g)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{L_1, \dots, L_n \geq 1} \frac{F_{L_1, \dots, L_n}^{(g)}}{x_1^{L_1+1} \cdots x_n^{L_n+1}}, \quad \omega_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_n \geq 1} \frac{\frac{\ell_1 \cdots \ell_n}{R^{(\ell_1 + \dots + \ell_n)/2}} T_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(g)}}{z_1^{\ell_1+1} \cdots z_n^{\ell_n+1}}$$

we have

$$\omega_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n) = W_n^{(g)}(x(z_1), \dots, x(z_n)) x'(z_1) \cdots x'(z_n).$$

with $x(z) := R^{1/2}(z + z^{-1})$ is the Zhukovsky transformation. Our approach gives a **combinatorial interpretation** to this relation arising from topological recursion.

Polynomiality phenomenon

The quantity $\omega_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n)$ has been well studied in the context of topological recursion : it is known that, for $2 - 2g - n < 0$, it is a rational function with poles at $z_i = \pm 1$.

Polynomiality phenomenon

The quantity $\omega_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n)$ has been well studied in the context of topological recursion : it is known that, for $2 - 2g - n < 0$, it is a rational function with poles at $z_i = \pm 1$.

Theorem (B., Gitter, Miermont 2024, see also Norbury and Scott 2013)

There exists a polynomial $Q_n^{(g)}$ of degree $3g + n - 3$ in n variables such that, for even ℓ_1, \dots, ℓ_n ,

$$T_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(g)} = R^{\frac{\ell_1 + \dots + \ell_n}{2}} Q_n^{(g)}(\ell_1^2, \dots, \ell_n^2) - \chi(\mathcal{M}_{g,n}) t^{2-2g-n} \delta_{\ell_1 + \dots + \ell_n, 0}$$

with $\chi(\mathcal{M}_{g,n})$ the Euler characteristic of the moduli space $\mathcal{M}_{g,n}$.

$$Q_3^{(0)}(\ell_1^2, \ell_2^2, \ell_3^2) = \frac{R'}{R}$$

$$Q_4^{(0)}(\ell_1^2, \ell_2^2, \ell_3^2, \ell_4^2) = \left(\frac{\ell_1^2 + \dots + \ell_4^2}{4} - 1 \right) \frac{R'^2}{R^2} + \frac{R''}{R}$$

$$Q_1^{(1)}(\ell_1^2) = \frac{1}{12} \left(\left(\frac{\ell_1^2}{4} - 1 \right) \frac{R'}{R} + \frac{R''}{R'} \right) = \frac{R}{12R'} Q_4^{(0)}(\ell_1^2, 0, 0, 0)$$

Plan

- 1 Introduction : définitions, histoire et motivations
- 2 Bijection CVS/BDG entre cartes planaires et arbres étiquetés
- 3 Cartes à bords géodésiques : résultats généraux
- 4 Une approche bijective dans le cas des pantalons**
- 5 Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

General idea

Recall that we aim at proving that the generating function $T(a, b, c)$ of bipartite planar maps with three tight boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ is equal to

$$T(a, b, c) = R^{a+b+c} \frac{d \ln(R)}{dt} - t^{-1} \mathbf{1}_{a=b=c=0}$$

with R as before.

General idea

Recall that we aim at proving that the generating function $T(a, b, c)$ of bipartite planar maps with three tight boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ is equal to

$$T(a, b, c) = R^{a+b+c} \frac{d \ln(R)}{dt} - t^{-1} \mathbf{1}_{a=b=c=0}$$

with R as before. We know from previous works that

$$T(0, 0, 0) = \frac{d \ln(R/t)}{dt}$$

as this is the generating function of planar maps with three marked vertices.

General idea

Recall that we aim at proving that the generating function $T(a, b, c)$ of bipartite planar maps with three tight boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ is equal to

$$T(a, b, c) = R^{a+b+c} \frac{d \ln(R)}{dt} - t^{-1} \mathbf{1}_{a=b=c=0}$$

with R as before. We know from previous works that

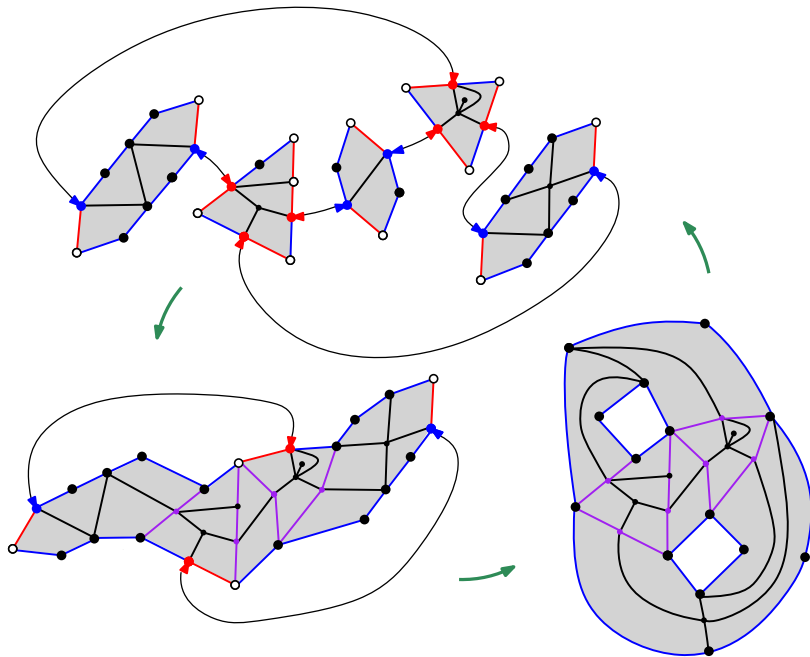
$$T(0, 0, 0) = \frac{d \ln(R/t)}{dt}$$

as this is the generating function of planar maps with three marked vertices.

We will show bijectively that

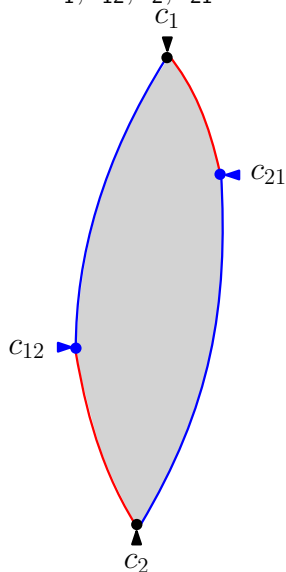
$$T(a, b, c) + t^{-1} \mathbf{1}_{a=b=c=0} = R^{a+b+c} \frac{X^3 Y^2}{t^6}$$

where X and Y are the generating functions of some objects called **bigeodesic diangles** and **bigeodesic triangles**, respectively.



Bigeodesic diangles

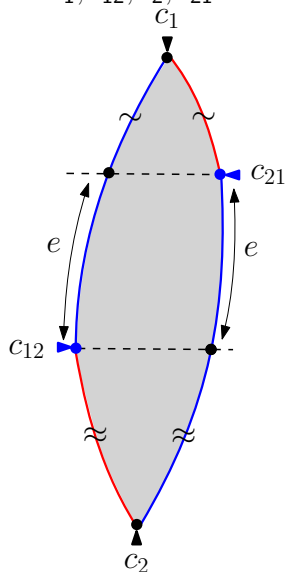
A **bigeodesic diangle** is a planar map with one boundary-face having four marked incident corners c_1, c_{12}, c_2, c_{21} in ccw order, satisfying the following constraints :



- $[c_1, c_2]$ and $[c_2, c_1]$ are geodesics,
- $[c_{12}, c_2]$ and $[c_{21}, c_1]$ are the unique geodesics between their endpoints,
- they share no edge with $[c_1, c_{12}]$ and $[c_2, c_{21}]$.

Bigeodesic diangles

A **bigeodesic diangle** is a planar map with one boundary-face having four marked incident corners c_1, c_{12}, c_2, c_{21} in ccw order, satisfying the following constraints :

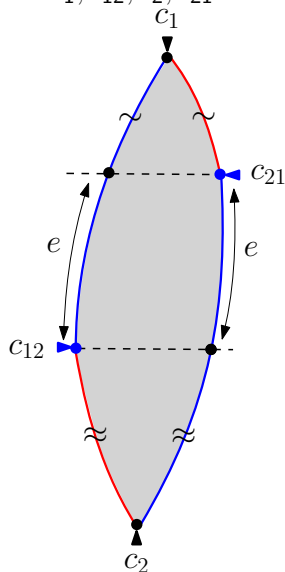


- $[c_1, c_2]$ and $[c_2, c_1]$ are geodesics,
- $[c_{12}, c_2]$ and $[c_{21}, c_1]$ are the unique geodesics between their endpoints,
- they share no edge with $[c_1, c_{12}]$ and $[c_2, c_{21}]$.

We call **exceedance** the length difference between $[c_1, c_{12}]$ et $[c_{21}, c_1]$. A diangle of zero exceedance is said *balanced*.

Bigeodesic diangles

A **bigeodesic diangle** is a planar map with one boundary-face having four marked incident corners c_1, c_{12}, c_2, c_{21} in ccw order, satisfying the following constraints :



- $[c_1, c_2]$ and $[c_2, c_1]$ are geodesics,
- $[c_{12}, c_2]$ and $[c_{21}, c_1]$ are the unique geodesics between their endpoints,
- they share no edge with $[c_1, c_{12}]$ and $[c_2, c_{21}]$.

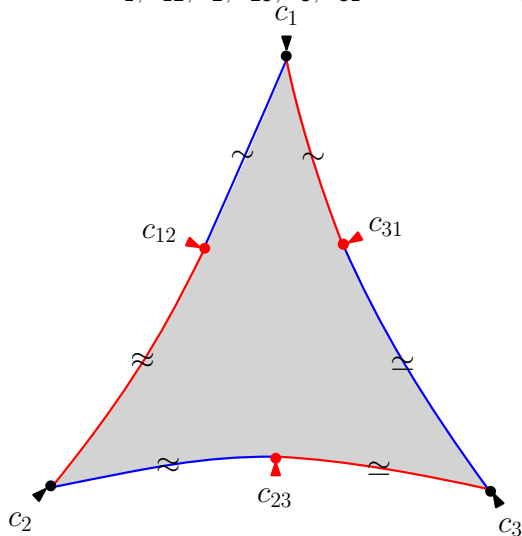
We call **exceedance** the length difference between $[c_1, c_{12}]$ et $[c_{21}, c_1]$. A diangle of zero exceedance is said *balanced*.

Proposition

The generating function of diangles with exceedances $e \geq 0$ is equal to $R^e X$, where X is the generating function of balanced diangles.

Bigeodesic triangle

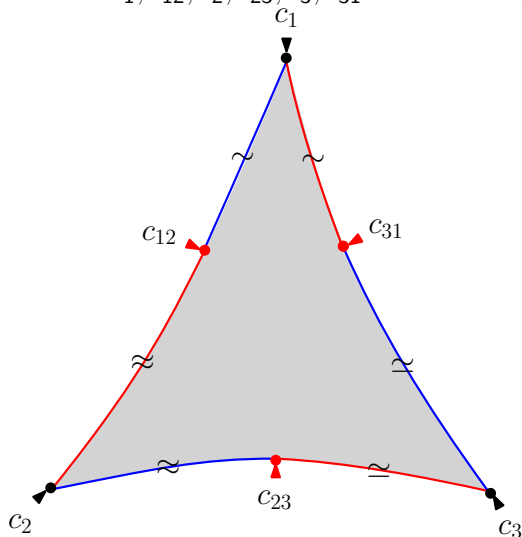
A **bigeodesic triangle** is a planar map with one boundary-face having six marked incident corners $c_1, c_{12}, c_2, c_{23}, c_3, c_{31}$ in ccw order, satisfying the following constraints :



- $[c_1, c_2]$ is a geodesic,
- each geodesic from c_1 to c_2 follows $[c_{12}, c_2]$,
- $[c_{12}, c_2]$ and $[c_2, c_{23}]$ have the same length and no common edge,
- and the same constraints hold when permuting 1, 2, 3 cyclically.

Bigeodesic triangle

A **bigeodesic triangle** is a planar map with one boundary-face having six marked incident corners $c_1, c_{12}, c_2, c_{23}, c_3, c_{31}$ in ccw order, satisfying the following constraints :



- $[c_1, c_2]$ is a geodesic,
- each geodesic from c_1 to c_2 follows $[c_{12}, c_2]$,
- $[c_{12}, c_2]$ and $[c_2, c_{23}]$ have the same length and no common edge,
- and the same constraints hold when permuting 1, 2, 3 cyclically.

We denote by Y the generating function of bigeodesic triangles, with no weight for the external face and the vertices of $]c_{12}, c_2]$, $]c_{23}, c_3]$ et $]c_{31}, c_1]$.

Assembling a pair of pants

We assemble a pair of pants from the following basic pieces :

- three bigeodesic diangles with nonnegative exceedences e_1 , e_2 , e_3 ,
- two bigeodesic triangles.

The generating function of such quintuplets is

$$(R^{e_1} X)(R^{e_2} X)(R^{e_3} X) Y^2 = R^{e_1+e_2+e_3} X^3 Y^2.$$

(Each balanced diangle or triangle can be reduced to the vertex-map.)

Assembling a pair of pants

We assemble a pair of pants from the following basic pieces :

- three bigeodesic diangles with nonnegative exceedences e_1 , e_2 , e_3 ,
- two bigeodesic triangles.

The generating function of such quintuplets is

$$(R^{e_1}X)(R^{e_2}X)(R^{e_3}X)Y^2 = R^{e_1+e_2+e_3}X^3Y^2.$$

(Each balanced diangle or triangle can be reduced to the vertex-map.)

The assembling is done in two steps :

- we attach the pieces together by identifying their «attachment points»,
- we glue the red boundaries to the blue boundaries.

Assembling a pair of pants

We assemble a pair of pants from the following basic pieces :

- three bigeodesic diangles with nonnegative exceedences e_1 , e_2 , e_3 ,
- two bigeodesic triangles.

The generating function of such quintuplets is

$$(R^{e_1}X)(R^{e_2}X)(R^{e_3}X)Y^2 = R^{e_1+e_2+e_3}X^3Y^2.$$

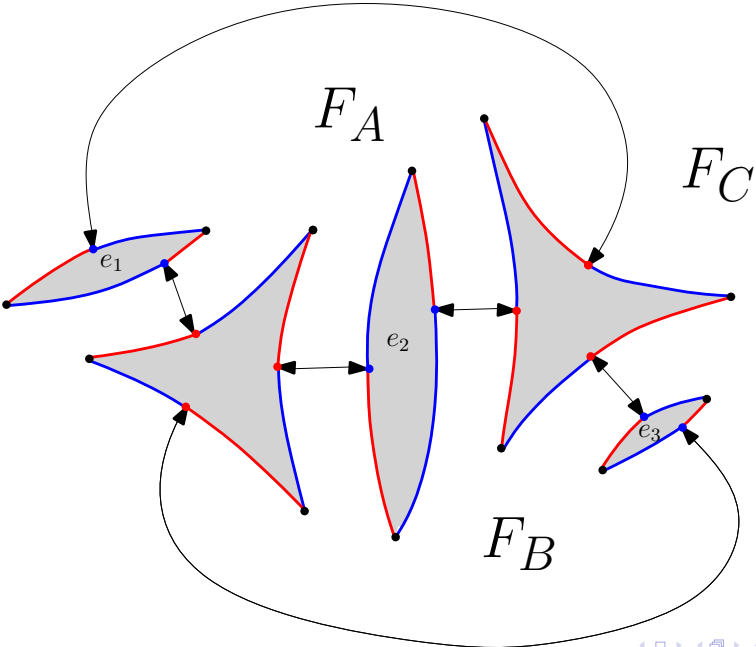
(Each balanced diangle or triangle can be reduced to the vertex-map.)

The assembling is done in two steps :

- we attach the pieces together by identifying their «attachment points»,
- we glue the red boundaries to the blue boundaries.

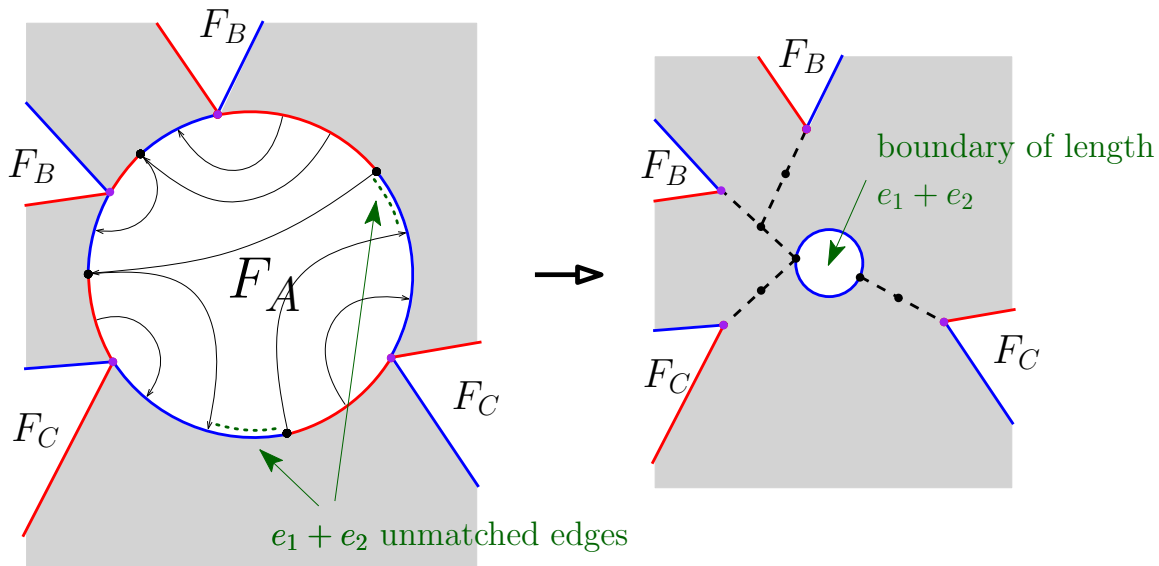
As there is more blue than red, some blue edges remain unmatched and form the tight boundaries of the pair of pants.

Assembling I : identification between attachment points



Assembling I : gluing red edges to blue edges

We proceed independently within each special face. For face F_A :



Assembling I : properties

We obtain a bipartite planar map with three boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ where

$$2a = e_1 + e_2,$$

$$2b = e_2 + e_3,$$

$$2c = e_3 + e_1.$$

Assembling I : properties

We obtain a bipartite planar map with three boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ where

$$2a = e_1 + e_2,$$

$$2b = e_2 + e_3,$$

$$2c = e_3 + e_1.$$

Such a map is said of **type I** : the length of each boundary is not larger than the sum of the lengths of the two others.

Assembling I : properties

We obtain a bipartite planar map with three boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ where

$$2a = e_1 + e_2,$$

$$2b = e_2 + e_3,$$

$$2c = e_3 + e_1.$$

Such a map is said of **type I** : the length of each boundary is not larger than the sum of the lengths of the two others. The weight of the map is equal to that of the original quintuplet, up to a factor t^6 due to the identification between vertices.

Assembling I : properties

We obtain a bipartite planar map with three boundaries of lengths $2a, 2b, 2c$ where

$$2a = e_1 + e_2,$$

$$2b = e_2 + e_3,$$

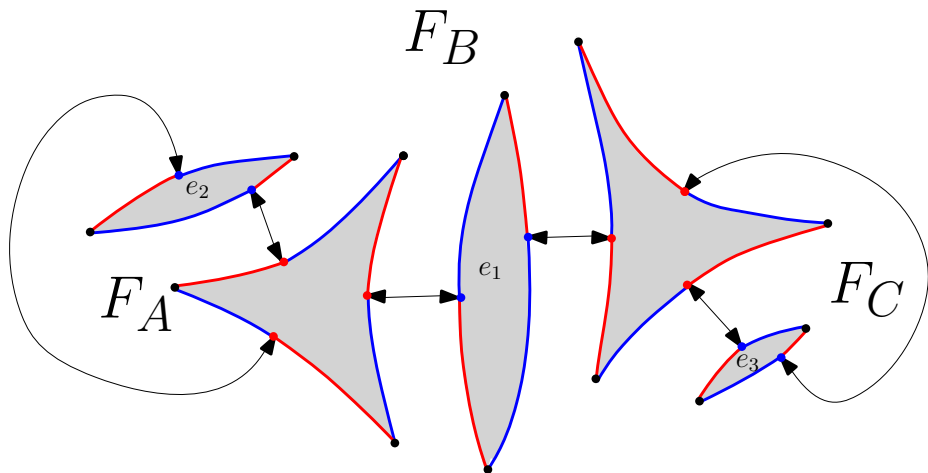
$$2c = e_3 + e_1.$$

Such a map is said of **type I** : the length of each boundary is not larger than the sum of the lengths of the two others. The weight of the map is equal to that of the original quintuplet, up to a factor t^6 due to the identification between vertices.

We need to find another assembling procedure for maps of **type II** : the length of one of the boundaries is at least the sum of the two others.

Assembling II

Only the identification between attachment points differs :



The boundaries have lengths $2a = e_2$, $2c = e_3$, $2b = 2e_1 + e_2 + e_3 \geq 2a + 2c$.

Theorem [B.-Guitter-Miermont, 2022]

The assembling procedure I (resp. II) is a **bijection** between the set of quintuplets formed by :

- three bigeodesic diangles of nonnegative exceedances e_1, e_2, e_3 ,
- and two bigeodesic triangles,

not all reduced to the vertex-map, and the set of planar maps with three **tight** boundaries of lengths :

$$\text{procedure I : } \begin{cases} 2a = e_1 + e_2 \\ 2b = e_2 + e_3 \\ 2c = e_3 + e_1 \end{cases}$$

$$\text{procedure II : } \begin{cases} 2a = e_2 \\ 2b = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ 2c = e_3 \end{cases}$$

Theorem [B.-Guitter-Miermont, 2022]

The assembling procedure I (resp. II) is a **bijection** between the set of quintuplets formed by :

- three bigeodesic diangles of nonnegative exceedances e_1, e_2, e_3 ,
- and two bigeodesic triangles,

not all reduced to the vertex-map, and the set of planar maps with three **tight** boundaries of lengths :

$$\text{procedure I : } \begin{cases} 2a = e_1 + e_2 \\ 2b = e_2 + e_3 \\ 2c = e_3 + e_1 \end{cases} \quad \text{procedure II : } \begin{cases} 2a = e_2 \\ 2b = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ 2c = e_3 \end{cases}$$

What has to be proved : boundaries are tight, procedure is bijective. This is done by showing that what delimits the diangles and triangles are certain canonically determined geodesics on the universal cover of the assembled map.

Theorem [B.-Gutierrez-Miermont, 2022]

The assembling procedure I (resp. II) is a **bijection** between the set of quintuplets formed by :

- three bigeodesic diangles of nonnegative exceedances e_1, e_2, e_3 ,
- and two bigeodesic triangles,

not all reduced to the vertex-map, and the set of planar maps with three **tight** boundaries of lengths :

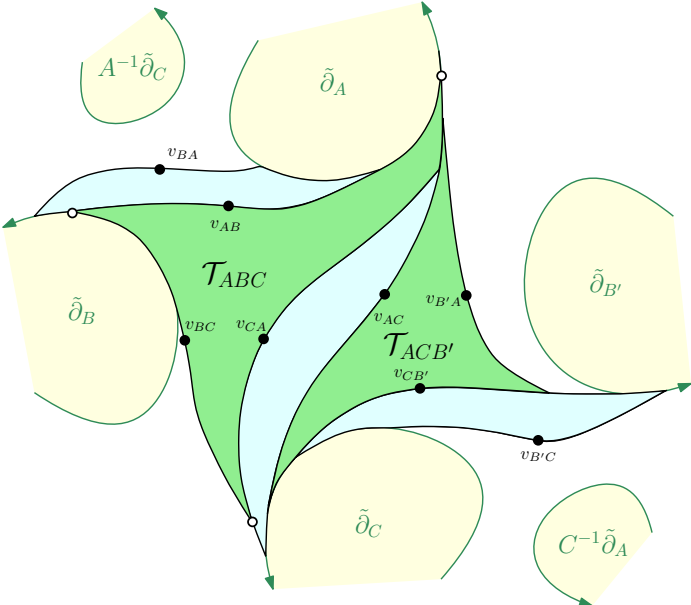
$$\text{procedure I : } \begin{cases} 2a = e_1 + e_2 \\ 2b = e_2 + e_3 \\ 2c = e_3 + e_1 \end{cases} \quad \text{procedure II : } \begin{cases} 2a = e_2 \\ 2b = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ 2c = e_3 \end{cases}$$

What has to be proved : boundaries are tight, procedure is bijective. This is done by showing that what delimits the diangles and triangles are certain canonically determined geodesics on the universal cover of the assembled map.

Enumerative corollary

$$\frac{(R^{e_1} X)(R^{e_2} X)(R^{e_3} X) Y^2}{t^6} = R^{a+b+c} \frac{X^3 Y^2}{t^6} = T(a, b, c) + t^{-1} 1_{a=b=c=0}$$

A glimpse at the decomposition procedure I



Plan

- 1 Introduction : définitions, histoire et motivations
- 2 Bijection CVS/BDG entre cartes planaires et arbres étiquetés
- 3 Cartes à bords géodésiques : résultats généraux
- 4 Une approche bijective dans le cas des pantalons
- 5 Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

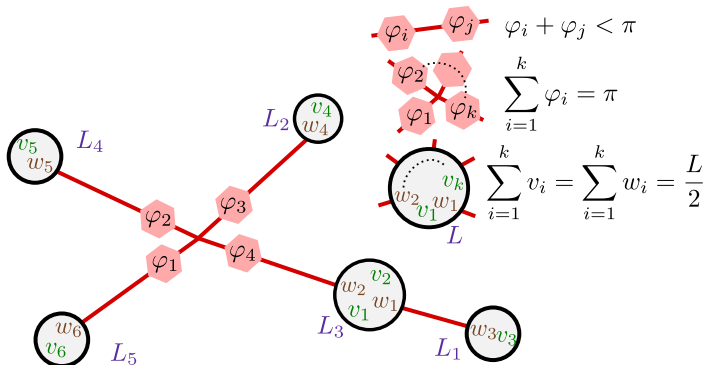
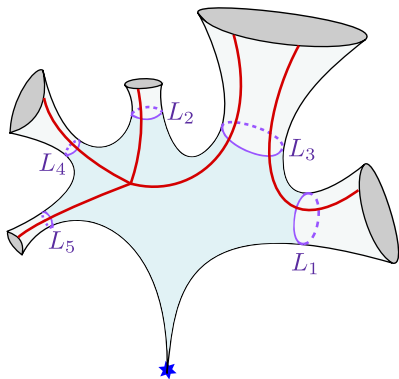
La construction précédente est un analogue discret d'une construction classique en géométrie hyperbolique, consistant à recoller deux triangles idéaux pour former un pantalon. J'aimerais la généraliser à des topologies quelconques (le tore pour commencer...).

Ce n'est pas la première analogie entre cartes et surfaces hyperboliques : le formalisme de la récurrence topologique s'applique aussi bien aux volumes de Weil-Petersson (Mirzakhani 2007) qu'à l'énumération de cartes (Eynard-Orantin 2007).

Citons également les travaux récents de Timothy Budd et ses collaborateurs...

Bijections pour les surfaces hyperboliques de genre 0

Dans des travaux récents, Timothy Budd et ses collaborateurs ont trouvé un analogue de la bijection CVS/BDG pour les surfaces hyperboliques de genre 0, qui leur permet d'étudier leur géométrie aléatoire sous la mesure de Weil-Petersson dans la limite d'un grand nombre de bords.



Conclusion : une analogie entre cartes et surfaces hyperboliques aléatoires ?

La construction précédente est un analogue discret d'une construction classique en géométrie hyperbolique, consistant à recoller deux triangles idéaux pour former un pantalon. J'aimerais la généraliser à des topologies quelconques (le tore pour commencer...).

Ce n'est pas la première analogie entre cartes et surfaces hyperboliques : le formalisme de la récurrence topologique s'applique aussi bien aux volumes de Weil-Petersson (Mirzakhani 2007) qu'à l'énumération de cartes (Eynard-Orantin 2007).

Citons également les travaux récents de Timothy Budd et ses collaborateurs...

Enfin, en grand genre, mentionnons l'universalité du **spectre des longueurs** :

- longueurs des géodésiques primitives fermées sur les surfaces hyperboliques (Mirzakhani-Petri 2019),
- longueurs des cycles simples courts dans les cartes (Janson-Louf 2022-2023 pour le cas à une face, Barazer-Giacchetto-Liu 2023 pour le cas d'un nombre quelconque fixé de faces).

Dans les deux cas, celui-ci converge pour $g \rightarrow \infty$ vers un processus de Poisson sur \mathbb{R}_+ d'intensité $\frac{\cosh \ell - 1}{\ell} d\ell$.

Merci de votre attention !

