Annuaire du Collège de France

121e année

2020
2021

Résumé des cours et travaux

COLLÈGE
DE FRANCE
1530

Annuaire du Collège de France
Cours et travaux du Collège de France

121 | 2024
2020-2021

Formes automorphes (chaire internationale)

Bảo Châu Ngô

Édition électronique
URL : https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/19198
DOI : 10.4000/12ktk
ISBN : 978-2-7226-0778-1
ISSN : 2109-9227

Éditeur
Collège de France

Édition imprimée
Date de publication : 18 novembre 2024
Pagination : 47-75
ISBN : 978-2-7226-0777-4
ISSN : 0069-5580

Référence électronique
Bảo Châu Ngô, « Formes automorphes (chaire internationale) », *L'annuaire du Collège de France* [En ligne], 121 | 2024, mis en ligne le 01 octobre 2024, consulté le 28 novembre 2024. URL : http://journals.openedition.org/annuaire-cdf/19198 ; DOI : https://doi.org/10.4000/12ktk

FORMES AUTOMORPHES (CHAIRE INTERNATIONALE)

Bảo Châu Ngô

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur à l'université de Chicago,
directeur scientifique de l'Institut d'études mathématiques avancées
du Vietnam, professeur invité au Collège de France

La série de cours « Dualité des fibrations de Hitchin et endoscopie » est disponible en audio et en vidéo, sur le site du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/dualite-des-fibrations-de-hitchin-et-endoscopie).

COURS – DUALITÉ DES FIBRATIONS DE HITCHIN ET ENDOSCOPIE

Mon cours, au printemps 2021, portera sur l'espace de module de Hitchin et ses généralisations. Cet espace a d'abord été introduit par Hitchin partant des mathématiques physiques [14] [15] puis reconnu comme un objet primordial du programme de Langlands géométrique. Sa connexion avec la formule des traces formulée dans [24] a conduit à une série de travaux [22] [25] aboutissant à la démonstration du lemme fondamental dans la théorie des formes automorphes.

Depuis la première démonstration du lemme fondamental par la voie de la fibration de Hitchin, de nombreuses améliorations ont été apportées à cette approche aussi bien sur le plan technique que conceptuel. On note les travaux de Chaudouard et Laumon qui ont démontré le lemme fondamental pondéré [6] [7], le travail de Migliorini et Shende sur le théorème de support [23], ainsi qu'une nouvelle démonstration du lemme fondamental fondée sur l'intégration *p*-adique due à Groechenig, Wyss et Ziegler [12]. Ces travaux seront rapportés dans ce cours ainsi que l'ébauche d'une généralisation de l'espace de module de Hitchin.

B.C. Ngô, « Formes automorphes », *Annuaire du Collège de France 2020-2021. Résumé des cours et travaux*, 121e année, Paris, Collège de France, 2024, p. 47-75, https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.19198.

Le résumé du cours suit essentiellement le plan des exposés oraux. On commence par rappeler dans la section 1 le comptage de points dans l'espace de modules des fibrés et fibrés avec structure additionnelle suivant un principe qui remonte aux travaux de Weil. Nous rappelons ensuite dans la section 2 les constructions de l'espace des modules des fibrés ainsi que la grassmannienne affine en payant une attention particulière aux groupes des composantes connexes. On rappelle la construction du morphisme de Hitchin et en ébauche une possibilité de généralisation dans la section 3. On met l'accent sur la construction d'un champ de Picard relatif qui agit sur la fibration de Hitchin. On continue avec des rappels sur les fibres de Springer affines et la formule de produit qui relie celles-ci à la fibre de Hitchin dans la section 4. On discute dans la section 5 la structure des fibres du champ de Picard et décrit leurs groupes de composantes connexes et la dimension de leur partie affine. Dans la section 6, on rappelle la notion de ξ-stabilité des fibrés de Higgs introduits par Chaudouard et Laumon. Dans la section 7, on discute du théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber dans la situation de la fibration de Hitchin et donne une description des supports des faisceaux pervers simples qui apparaissent dans cette décomposition, ainsi qu'une généralisation due à Migliorini et Shende. Dans la dernière section, on discute l'approche d'intégration p-adique de Groechenig, Wyss et Ziegler.

FIBRÉS PRINCIPAUX SUR UNE COURBE

Comptage de Weil

Nous commençons par rappeler l'idée de Weil de « compter » les fibrés vectoriels sur une courbe algébrique à l'aide des adèles. Nous fixons une courbe projective lisse X définie sur un corps k. Nous notons F le corps des fonctions rationnelles sur X et $\eta = \mathrm{Spec}(F)$ son point générique. Pour tout point fermé $x \in |X|$, nous notons F_x la complétion de F par rapport à la valuation associée à x, et $\mathcal{O}_x$ son anneau de valuation. L'anneau des adèles $\mathbf{A} = \mathbf{A}_F$ consiste en des suites $(a_x \in F_x | \, x \in |X|)$ avec $a_x \in \mathcal{O}_x$ pour presque tout x. Il contient F comme sous-anneau ainsi que $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} = \Pi_{x \in |X|} \, \mathcal{O}_x$. Les anneaux F_x, $\mathcal{O}_x$, $\mathbf{A}$, $\mathcal{O}_{\mathbf{A}}$ sont munis de topologie naturelle déduite de la définition de F_x comme une complétion. Dans le cas où k est un corps fini, $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{A}}$ sont de groupes abéliens profinis donc compact, alors que F_x et $\mathbf{A}$ sont des groupes abéliens topologiques localement compacts contenant $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{A}}$ respectivement comme sous-anneaux compacts. Notons aussi que F est un sous-groupe discret cocompact de $\mathbf{A}$.

Suivant une idée de Weil, nous allons décrire, à l'aide des adèles, l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels de rang n sur X, ou mieux le groupoïde Fib_n des fibrés vectoriels de rang n sur X. Celui-ci est une catégorie dont les objets sont les fibrés de rang n sur X et les flèches sont des isomorphismes d'iceux. Si V est un fibré vectoriel de rang n sur X, sa fibre générique V_F est un F-espace vectoriel de dimension n. Pour tout $x \in |X|$, la restriction V_x de V au disque formel $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ est un $\mathcal{O}_x$-module libre de rang n. On en déduit une équivalence de groupoïdes

$$\mathrm{Fib}_n \to \mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbf{A})/\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$$

Nous souhaitons généraliser le comptage de Weil des fibrés vectoriels aux fibrés principaux sous un groupe réductif G (qu'on appelera « G-fibré ») ou plus généralement sous un schéma en groupes au-dessus de X. Notons que la description adélique des fibrés vectoriels est fondée sur le fait que les restrictions d'un fibré vectoriel sur X au point générique η et aux disques formels X_x sont triviales. Une difficulté que nous ne manquerons pas d'observer est que l'annulation de cohomologie galoisienne de G au point générique n'est plus valide pour un groupe réductif général. La généralisation aux fibrés principaux E sous l'action d'un schéma en groupes lisses G sur X sera donc astreinte aux hypothèses de l'annulation de certains groupes de cohomologie galoisienne. Le sujet de cohomologie galoisienne a été magistralement traité dans un cours de Jean-Pierre Serre au Collège de France [28] sur lequel on s'appuiera.

C'est pour cette raison que nous nous restreignons aux cas où le corps de base k est ou bien un corps algébriquement clos, ou bien un corps fini. Si k est un corps algébriquement clos, la fibre $\overline{E}_x$ de E au-dessus du point x a au moins un k-point. L'hypothèse de lissité de G, donc du G-fibré E, au-dessus de x, nous permet alors d'étendre un k-point de $\overline{E}_x$ en une section de E_x au-dessus de X_x, de sorte que E_x est trivial comme G_x-torseurs au-dessus de X_x. Si k est un corps fini, la même conclusion vaut si on suppose de plus que les fibres de G au-dessus de X sont connexes. Sous cette hypothèse, la fibre $\overline{E}_x$ au-dessus du corps fini résiduel $k(x)$ du point fermé $x \in |X|$ a un $k(x)$-point car d'après un théorème du Lang [20], on a l'annulation de la cohomologie galoisienne

$$\mathrm{H}^1(k(x), G) = 0$$

sous l'hypothèse que G est un groupe connexe défini sur le corps fini $k(x)$. La lissité de E_x au-dessus de X_x nous permet de nouveau d'étendre un $k(x)$-point dans la fibre $\overline{E}_x$ au-dessus de $k(x)$, en une section de E_x au-dessus de X_x.

Quant à la trivialisation d'un G-fibré au point générique d'une courbe définie sur un corps k algébriquement clos, nous avons le théorème de Steinberg [30] : soit $F = k(X)$ le corps des fonctions rationnelles d'une courbe X définie sur un corps algébriquement clos k. Pour tout groupe réductif connexe G défini sur F, on a $H^1(F, G) = 0$. Si de plus, le corps algébriquement clos k est de caractéristique 0, l'annulation vaut pour tout groupe algébrique connexe.

Si k est un corps fini, en supposant que G est un groupe semi-simple simplement connexe, on a encore $H^1(F, G) = 0$ d'après Kneser. Pour un groupe réductif général, notamment pour des tores non déployés, le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(F, G)$ est infini. Notons toutefois que si E_F est la fibre générique d'un G-torseur E défini sur une courbe X projective lisse sur un corps fini, la classe d'isomorphisme $cl(E_F)$ appartient au sous-ensemble dit « de Tate-Shafarevich »

$$\ker^1(F, G) = \ker(H^1(F, G) \to H^1(\mathbf{A}, G))$$

C'est un ensemble fini d'après un théorème de Serre. En fait, comme nous sommes dans la situation de corps de fonctions, l'ensemble de Tate-Shafarevich $\ker^1(F, G)$ est un groupe abélien fini.

Dans la suite, le corps de base k est un corps algébriquement clos, ou un corps fini. X est une courbe projective lisse, connexe sur k, G est un schéma en groupe lisse de type fini sur X dont la fibre générique est réductive. Fib_G est le groupoïde des G-fibrés sur X. Compte tenu des annulations de cohomologie galoisienne énoncées ci-dessus, on a des descriptions adéliques de Fib_G comme suit. Si k est algébriquement clos, on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{Fib}_G \simeq G(F)\backslash G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_x)$$

Si k est fini, et si on suppose en plus que toutes les fibres de G sont connexes, alors on a

$$\mathrm{Fib}_G \simeq \coprod_{\iota \in \ker^1(F, G)} G^\iota(F)\backslash G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$$

où G^ι est la forme intérieure de G obtenue en tordant G par ι. Comme $\iota \in \ker^1(F, G)$, on a l'égalité $G^\iota(\mathbf{A}) = G(\mathbf{A})$ qui donne un sens à la formule ci-dessus.

Comptage des fibrés de Higgs généralisés

On a un cadre général qui inclut le cas des fibrés de Higgs. En plus de la courbe X et le schéma en groupes G au-dessus de X, nous nous donnons un X-schéma M muni d'une action de G. Au lieu de compter les G-fibrés sur X, nous nous proposons d'étudier le groupoïde des G-fibrés munis d'un M-champ c'est-à-dire un couple (E, φ) où E est un G-fibré et

$$\varphi : X \to M_E = M \times^G E$$

est une section du X-schéma M_E obtenu en tordant M par le G-torseur E. La donnée d'un tel couple (E, φ) est formellement équivalente à la donnée d'une section du champ

$$\begin{array}{c} [M/G] \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

Lorsque $M = X$, $[M/G] = BG$ est le classifiant des G-torseurs et nous retombons sur le problème du comptage des G-fibrés considéré précédemment.

Dans le cas où $M = \mathfrak{g}_K$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G tordue par le fibré canonique K de X, $\mathcal{M}$ est le groupoïde des fibrés de Higgs. Ce groupoïde est muni d'un morphisme particulièrement intéressant, à savoir le morphisme de Hitchin. Avant d'étudier la fibration de Hitchin proprement dite, nous allons ébaucher quelques traits de la fibration de Hitchin dans la situation plus générale que nous venons de mettre en place.

Considérons d'abord le cas où G est défini sur k, $G = G_k \times_k X$, H_k est un sous-groupe de G_k, $M_k = G_k/H_k$ et $M = M_k \times_k X$. Dans ce cas, $[M/G] = BH$ est le classifiant de H, de sorte que le groupoïde $\mathcal{M}$ des couples (E, φ) des sections de $[M/G] \to X$ est équivalent au groupoïde Fib_H des H-fibrés. Ce fait simple mais très utile est un théorème d'Ehresmann. Dans ce cours, nous nous intéressons au cas opposé où G/H est affine ou quasi-affine. Dans ce cas, le morphisme $\mathrm{Fib}_H \to \mathrm{Fib}_G$ est alors de type fini.

En général, nous voudrions décomposer le groupoïde $\mathcal{M}$ des sections du morphisme $[M/G] \to X$ en des sous-groupoïdes qui ressemblent le plus possible au cas d'espaces homogènes $M = G/H$. Cette décomposition est une généralisation de la fibration de Hitchin. Nous notons $\pi_M : M \to X$ le morphisme structural du X schéma M. Considérons le quotient de M par l'action de G

$$A = M /\!/ G = \mathrm{Spec}_X\left((\pi_{M,*}\mathcal{O}_M)^G\right)$$

au sens de la théorie des invariants géométrique. Nous supposons que $\pi_A : A \to X$ est un morphisme affine de type fini. Cette hypothèse résulte la plupart du temps de la théorie géométrique des invariants. Le morphisme $M \to A$ induit un morphisme de groupoïdes

$$h : \mathcal{M} \to \mathcal{A} = \Gamma(X, A)$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble de sections de $A \to X$

$$\mathcal{A} = \Gamma(X, A) = A(F) \cap A(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$$

Pour tout $a \in A$, nous formons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ X \arrow[r, "a"] & A \arrow[l, bend left, "\pi_A"] \end{tikzcd}$$

où M_a est l'image réciproque de l'image de la section $a : X \to A$. C'est un sous-schéma fermé de M invariant sous l'action de G. On déduit de ces considérations une première décomposition de $\mathcal{M}$ en

$$h : \mathcal{M} = \coprod_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{M}_a \to \mathcal{A}$$

où $\mathcal{M}_a$ est le groupoïde des sections de $[M_a/G] \to X$. Le morphisme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ est une généralisation de la fibration de Hitchin.

Du point de vue arithmétique, nous avons une décomposition plus raffinée fondée sur la décomposition de $M_{\overline{\eta}}$ en orbites de $G_{\overline{\eta}}$. Soit $M_{\alpha,\eta} \subset M_{\overline{\eta}}$ un sous-schéma localement fermé de $M_{\overline{\eta}}$ sur lequel $G_{\overline{\eta}}$ agit transitivement et qui, de plus, est défini sur η. Cela signifie donc qu'on a un sous-schéma localement fermé $M_\alpha \subset M_\eta$ invariant sous l'action de G_η, tel que l'action de G_η sur M_η est géométriquement transitive. Autrement dit, α est une orbite de $G_{\overline{\eta}}$ sur $M_{\overline{\eta}}$ qui est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$. L'adhérence schématique $\bar{M}_\alpha$ de M_α dans M est un sous-schéma fermé de M invariant sous l'action de G. Nous considérons le groupoïde $\mathcal{M}_\alpha$ des sections de $[\bar{M}_\alpha/G] \to X$ et le sous groupoïde $\mathcal{M}_\alpha^+$ de $\mathcal{M}_\alpha$ des sections (E, φ) : $X \to [\bar{M}_\alpha/G]$ dont la fibre générique se factorise à travers $[M_\alpha/G]$.

On a alors une décomposition

$$\mathcal{M} = \bigsqcup_\alpha \mathcal{M}_\alpha^+$$

où α parcourt l'ensemble des orbites de $G_{\overline{\eta}}$ dans $M_{\overline{\eta}}$ qui sont stables sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.

Nous avons ainsi décomposé $\mathcal{M}$ en une réunion disjointe des pièces $\mathcal{M}_\alpha^+$ qui s'approchent autant que possible du cas homogène $X = G/H$. Nous allons maintenant décrire $\mathcal{M}_\alpha^+$ sous certaines hypothèses additionnelles. On se donne une section

$$\gamma : X \to \bar{M}_\alpha$$

dont la fibre générique $\gamma_\eta : \eta \to \bar{M}_\alpha$ se factorise par M_α. Supposons que le corps de base k est algébriquement clos. Notons H_γ le centralisateur de γ que nous supposons réductif et connexe. On a alors

$$\mathcal{M}_\alpha^+ = H(F)\backslash\{g \in G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_\mathbf{A}) \,|\, g^{-1}\gamma \in \bar{M}_\alpha(\mathcal{O}_\mathbf{A})\}.$$

Dans la suite de ce cours, nous allons étudier plus en détails la géométrie des fibres de Hitchin généralisées de type $\mathcal{M}_\alpha^+$. Contentons-nous pour le moment de commenter un exemple très simple. Considérons le groupe multiplicatif $G = \mathbb{G}_m$ agissant sur la droite affine $M = \mathbb{A}^1$. Les points du groupoïde $\mathcal{M}$ des morphismes $X \to [\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]$ consiste alors en couples (L, ϕ) où L est un fibré en droites sur X et $\phi \in \mathrm{H}^0(X, L)$ est une section globale de L. Le sous-groupoïde $\mathcal{M}^+$ consiste en des couples (L, ϕ) comme ci-dessus avec $\phi \neq 0$. L'application $(L, \phi) \to \mathrm{div}(\phi)$ où $\mathrm{div}(\phi)$ est le diviseur des zéros de ϕ induit une équivalence entre $\mathcal{M}^+$ et l'ensemble des diviseurs effectifs de X. Cet exemple est typique des cas où le centralisateur H est trivial. Dans ce cas, le groupoïde est purement adélique dans le sens où le groupe arithmétique $H(F)$ est trivial.

Considérons le cas où H est un schéma en groupe commutative. Dans ce cas, $\mathcal{M}_\alpha^+$ n'est plus local. Néanmoins, on peut remarquer que l'action de $H(F)$ sur $\{g \in G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_\mathbf{A}) | g^{-1}\gamma \in \bar{M}_\alpha(\mathcal{O}_\mathbf{A})\}$ s'étend au groupe $H(\mathbf{A})$. Notons que sous des hypothèses assez générales, le sous-groupe $H(\mathcal{O}_\mathbf{A})$ de $H(\mathbf{A})$ agit trivialement sur $\{g \in G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_\mathbf{A}) | g^{-1}\gamma \in \bar{M}_\alpha(\mathcal{O}_\mathbf{A})\}$ de sorte que nous pouvons considérer le quotient

$$\mathcal{N}_\alpha^+ = (H(\mathbf{A})/H(\mathcal{O}_\mathbf{A}))\backslash\{g \in G(\mathbf{A})/G(\mathcal{O}_\mathbf{A}) | g^{-1}\gamma \in \bar{M}_\alpha(\mathcal{O}_\mathbf{A})\}$$

est alors aussi purement adélique. Le morphisme naturel

$$\mathcal{M}_\alpha^+ \to \mathcal{N}_\alpha^+$$

peut alors être considéré comme le quotient de $\mathcal{M}_\alpha^+$ par $\mathcal{P}_\alpha = H(F)\backslash H(\mathbf{A})/H(\mathcal{O}_\mathbf{A})$. Notons que $\mathcal{P}_\alpha$ est le groupoïde des H-fibrés sur X de sorte la fibre de Hitchin généralisée $\mathcal{M}_\alpha^+$ est une fibration de fibre $\mathcal{P}_\alpha$ au-dessus du groupoïde $\mathcal{N}_\alpha^+$ qui est de nature purement local adélique. Cette structure cruciale dans notre étude des fibrations de Hitchin est appelée « la formule de produit ».

Notons aussi que si le corps de base k est un corps fini, le problème de comptage des k-points dans la fibre de Hitchin revient à étudier le morphisme $\mathcal{M}_\alpha^+(k) \to \mathcal{N}_\alpha^+(k)$ où $\mathcal{M}_\alpha^+(k)$ et $\mathcal{N}_\alpha^+(k)$ sont les groupoïdes des points fixes sous Frobenius de $\mathcal{M}_\alpha^+$ et $\mathcal{N}_\alpha^+$. Ce morphisme de groupoïdes n'est pas surjectif en général. En effet, un point fixe sous Frobenius de $\mathcal{N}_\alpha$ définit une classe dans le groupe de cohomologie galoisienne $\mathrm{H}^1(\mathbf{A}, H)$. Il est l'image d'un point fixe sous Frobenius de $\mathcal{M}_\alpha^+$ si et seulement si la classe qui s'en déduit est dans l'image du morphisme global-local

$$\mathrm{H}^1(F, H) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{A}, H)$$

ou, autrement dit, si son image dans le conoyau $\mathrm{coker}^1(F, H)$ est nulle. Ainsi, ce problème de comptage ferait intervenir aussi bien le noyau $\ker^1(F, H)$ que le conoyau $\mathrm{coker}^1(F, H)$.

Nous notons que, même si on avait commencé par un champ quotient $[M/G]$ où M est un k-schéma affine muni d'une action d'un groupe G défini sur k, la description des $\mathcal{M}_\alpha$ fait intervenir des sous-schémas en groupes H de $G \times_k X$ qui ne sont plus nécessairement constants. C'est pourquoi il est crucial de considérer des problèmes de comptage de fibrés principaux sous des schémas en groupes qui ne sont pas constants.

LE CHAMP DE MODULE DES FIBRÉS ET LA GRASSMANNIENNE AFFINE

Dans l'exposé précédent, nous avons étudié le groupoïde Fib_G des G-fibrés principaux sur une courbe d'un point de vue essentiellement arithmétique, c'est-à-dire donné une description adélique de Fib_G en tenant compte de certains groupes de cohomologie galoisienne. Dans cet exposé, nous considérons Fib_G comme un objet géométrique en l'occurrence d'un champ algébrique. Désormais, Fib_G n'est plus simplement un groupoïde mais un foncteur qui associe à tout k-schéma test S le groupoïde $\mathrm{Fib}_G(S)$ des G-fibrés sur $X \times S$. On pourrait alors parler de sa dimension, ses déformations infinitésimales, mais aussi l'ensemble de ses composantes connexes. L'ensemble des composantes connexes de Fib_G, qui est en fait un groupe abélien de type fini, est relié au conoyau de la suite exacte globale locale de cohomologie galoisienne de G considérée dans l'exposé précédent. Nous allons discuter aussi de la grassmannienne affine qui en est la contrepartie locale. Nous allons mettre l'accent sur les schémas en groupes sur X non constants au lieu des groupes définis sur le corps de base.

Schéma en groupes

Soit X une courbe projective lisse définie sur un corps algébriquement clos k. On va décrire les schémas en groupes lisses G de type fini au-dessus de X dont la fibre générique G_F est un groupe réductif. D'après la théorie des groupes réductifs définis sur un corps [29], la fibre générique G_F de G est complètement déterminée par la donnée radicielle absolue $\Psi = \Psi(G_{\overline{F}})$ constituée des groupes de caractères et cocaractères d'un tore maximal munis de sous-ensemble des racines et coracines, ainsi que celui des racines simples, et un homomorphisme continu

$$\rho^{\mathrm{Out}} : \Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Aut}(\Psi) = \mathrm{Out}(G_{\overline{F}})$$

Il existe un ouvert dense U de X tel que la fibre de G au-dessus de tout point $u \in U$ est réductive. L'homomorphisme ρ^{Out} se factorise alors par le groupe fondamental $\pi_1(U, \overline{F})$ de U pointé par le point géométrique générique qu'on a choisi. La restriction de G à U est alors complètement déterminée par la donnée radicielle $\Psi = \Psi(G_{\overline{F}})$ et $\rho^{\mathrm{Out}} : \pi_1(U) \to \mathrm{Aut}(\Psi)$.

D'après le théorème de recollement formel de Beauville et Laszlo [1], G est complètement déterminé par la restriction de G à U et les restrictions G_x de G aux disques formels X_x autour des points $x \in X \setminus U$, lesquels sont en nombres finis. Le schéma en groupes G_x lisse au-dessus de X_x est complètement déterminé par le sous-groupe $G(\mathcal{O}_x)$ de $G(F_x)$, qui en est un sous-groupe borné. On a la formule

$$\mathcal{O}_x[G_x] = \{f \in F_x[G_x] \quad | \quad f(\alpha) \in \mathcal{O}_x \quad \forall \alpha \in G(\mathcal{O}_x)\}.$$

Un exemple important de tels schémas en groupes est le schéma en groupes de Bruhat-Tits associé à n'importe quel point $b \in \mathcal{B}$ de l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe semi-simple. À chaque point $b \in B$, le stabilisateur K_b de b est un sous-groupe borné de $G(F_x)$. Il existe un unique schéma en groupes lisses G_b au-dessus de X_x tel que $G_b(\mathcal{O}_x) = K_b$. Il existe aussi un unique sous-schéma en groupes ouvert G_b^0 de G_b ayant les fibres connexes qui, par définition, est le schéma en groupes de Bruhat-Tits associé à $b \in \mathcal{B}$. Tout sous-groupe borné K de $G(F_x)$ stabilise un certain point de l'immeuble $b \in B$ *i.e* $K \subset K_b$. Il s'ensuit que pour tout schéma en groupes lisses G_x

au-dessus de X_x de fibre générique $G(F_x)$, il existe un homomorphisme de schémas en groupes

$$G_x \to G_b$$

On en déduit un homomorphisme de schémas en groupes à fibres connexes $G_x^0 \to G_b^0$.

Lorsque $G_x^\bullet$ est un tore, l'immeuble de Bruhat-Tits est réduit à un point. Dans ce cas, G_b est le schéma en groupes lisses dont le groupe des $\mathcal{O}_x$-points est le sous-groupe borné maximal de $G_x(F_x)$. Le schéma en groupes de Bruhat-Tits en est le sous-schéma en groupes ouvert à fibres connexes. Ce schéma en groupes est aussi appelé « le modèle de Néron connexe des tores ».

La grassmannienne affine

La grassmannienne affine des réseaux de rang n est le foncteur $\mathcal{Q}_n$ qui associe à toute k-algèbre R l'ensemble $\mathcal{Q}_n(R)$ des $R[[t]]$-modules projectifs $\mathcal{V}$ de $V_R = R((t))^n$ tels que le morphisme $R((t))$-linéaire induit

$$\mathcal{V} \otimes_{R[[t]]} R((t)) \to V_R$$

est un isomorphisme. Ici, nous avons noté $R[[t]] = R \widehat{\otimes} k[[t]]$, $R((t)) = R \widehat{\otimes} k((t))$. On pourrait penser d'un élément de $\mathcal{Q}_n(R)$ comme une famille de réseaux de $k((t))^n$ paramétrée par $\mathrm{Spec}(R)$.

Le foncteur $\mathcal{Q}_n$ est représentable par une limite inductive de schémas projectifs formant un système dont les morphismes de transition sont des immersions fermées. La démonstration de cette assertion est fondée sur le lemme d'algèbre suivant – on renvoie à l'exposé de Zhu pour une démonstration [31]. Soit R un anneau noethérien. Soit $\mathcal{V}$ un $R[[t]]$ sous-module de $R((t))^n = V$ tel que $\mathcal{V} \otimes_{R[[t]]} R((t)) \to V$ est un isomorphisme. Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$t^N R[[t]]^n \subset \mathcal{V} \subset t^{-N} R[[t]]^n$$

et de plus $Q = t^{-N} R[[t]]/\mathcal{V}$ est un R-module plat. Inversement, pour tout quotient de $t^{-N} R[[t]]^n / t^N R[[t]]$ qui est plat comme R-module et stable sous l'action de t, le noyau

$$\mathcal{V} = \ker(t^{-N} R[[t]] \to Q)$$

est un $R[[t]]$-module projectif qui satisfait $\mathcal{V} \otimes_{R[[t]]} R((t)) = R((t))^n$. Admettant ce lemme, on peut représenter $\mathcal{Q}_n$ comme une limite stricte des sous-schémas fermés des Grassmanniennes ordinaires.

La construction de la grassmannienne affine des réseaux peut être généralisée à n'importe quel schéma en groupes lisses G_x au-dessus de X_x à la place du schéma en groupes constant GL_n. Nous notons $\mathcal{Q}_{G_x}$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre R

le groupoïde $\mathcal{Q}_{G_x}(R)$ des G_x-fibrés au-dessus de $R\widehat{\otimes}\mathcal{O}_x$ munis d'une trivialisation au-dessus de $R\widehat{\otimes}F_x$. C'est aussi le faisceau associé au préfaisceau

$$R \to G_x(F_x\widehat{\otimes}R)/G_x(\mathcal{O}_x\widehat{\otimes}R)$$

Le foncteur $\mathcal{Q}_{G_x}$ est représentable par une limite inductive de k-schémas de type fini formant un système inductif dans lequel les morphismes de transition sont des immersions fermées. Lorsque G_x est un schéma en groupes de Bruhat-Tits, il est même représentable par une limite inductive de schémas projectifs formant un système dans lequel les morphismes de transition sont des immersions fermées.

La grassmannienne affine n'est pas un k-schéma de type fini. Sauf si la fibre générique de G est un tore, la grassmannienne affine $\mathcal{Q}_G$ n'est pas de dimension finie. Dans le cas le plus simple $G = \mathbb{G}_m$ l'espace topologique sous-jacent est discret, donc de dimension 0 et pourtant la grassmannienne affine $\mathcal{Q}_G$ n'est pas localement de type fini. On peut démontrer que la composante neutre de $\mathcal{Q}_{\mathbb{G}_m}$ est isomorphe à la complétion de $\mathbb{G}_m$ à son origine. Dans le cas où la fibre générique de G est un tore, la grassmannienne affine $\mathcal{Q}_G$ est de dimension finie. On notera alors

$$\delta(G) = \dim(\mathcal{Q}_G).$$

Nous nous intéressons tout particulièrement à l'ensemble des composantes connexes $\pi_0(\mathcal{Q}_G)$ de la grassmannienne affine $\mathcal{Q}_G$. Nous supposons que le corps de base est algébriquement clos. Dans le cas $G = \mathbb{G}_m$, on a $\mathcal{Q}_{\mathbb{G}_m}(k) = F^\times/\mathcal{O}^\times = \mathbf{Z}$ et on a $\pi_0(\mathcal{Q}_{\mathbb{G}_m}) = \mathbf{Z}$. La même conclusion vaut pour les tores induit, i.e. si $G = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_E/\mathcal{O}}\mathbb{G}_m$ est la restriction à la Weil de $\mathbb{G}_m$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ d'une extension finie de F on a aussi $\pi_0(\mathcal{Q}_G) = \mathbf{Z}$. Par un argument de Kottwitz, on a

$$\pi_0(\mathcal{Q}_G) = \Lambda_{\rho^{\mathrm{Out}}(\Gamma_F)}$$

si la fibre générique de G est un tore et sa fibre spéciale est connexe. Ici, Λ est le groupe de cocaractères du tore définis sur la clôture algébrique du point générique, et $\Lambda_{\rho^{\mathrm{Out}}(\Gamma_F)}$ est le quotient maximal de Λ invariant sous l'action du groupe de Galois Γ_F de F. En général, si on suppose toujours que la fibre générique de G est réductive et sa fibre spéciale est connexe, on a le résultat de Pappas-Rapoport [27]

$$\pi_0(\mathcal{Q}_G) = (\Lambda/\mathbf{Z}\Phi^\vee)_{\rho^{\mathrm{Out}}(\Gamma_F)}$$

où Λ est le groupe des cocaractères du tore maximal T, et $\mathbf{Z}\Phi^\vee$ est son sous-groupe abélien engendré par les coracines. Le quotient $\Lambda/\mathbf{Z}\Phi^\vee$ est aussi appelé « le groupe fondamental algébrique de G ». En particulier, $\mathcal{Q}_G$ est connexe si la fibre générique de G est semi-simple et simplement connexe car dans ce cas Λ est engendré par les coracines. Le cas général se déduit du cas simplement connexe et celui des tores.

Le groupe des composantes connexes $\pi_0(\mathcal{Q}_G)$ est relié aux groupes de cohomologie galoisienne étudiés dans l'exposé précédent. Si k est un corps fini, $x \in |X|$ est un point fermé de X, $\sigma_x \in \Gamma_{k(x)}$ le Frobenius correspondant, alors $\mathrm{H}^1(F_x, G)$ s'identifie au sous-groupe de torsion de $\pi_0(\mathcal{Q}_G)\sigma_x$.

Le champ de modules des *G*-fibrés

Soit G un schéma en groupes affine lisse de type fini défini sur une courbe X projective lisse sur un corps k. On considère le foncteur en groupoïdes qui associe à tout k-schéma S le groupoïde $\mathrm{Fib}_G(k)$ des G-fibrés sur $X \times_k S$. Le foncteur Fib_G n'est pas représentable par un k-schéma mais un champ algébrique lisse localement de type fini sur k.

Nous nous intéressons tout particulièrement à l'ensemble des composantes connexes de Fib_G qui se trouve muni d'une structure de groupe abélien. Ce groupe a été calculé par Heinloth [13] en réponse à une question de Pappas et Rapoport. Supposons que G est un schéma en groupes lisses de type fini sur une courbe X projective lisse sur un corps k algébriquement clos. Supposons que la fibre générique de G est connexe et que toutes ses fibres sont connexes. Alors on a une description du groupe des composantes connexes de Fib_G complètement analogue à celui des Grassmanniennes affines :

$$\pi_0\,(\mathrm{Fib}_G) = (\Lambda/\mathbf{Z}\Phi^\vee)_{\rho^{\mathrm{Out}}\,(\Gamma_F)}$$

Ceci n'est pas simplement une analogie. Le théorème de recollement formel de Beauville-Laszlo implique qu'il existe en tout point $x \in |X|$ un morphisme

$$\beta_x : \mathcal{Q}_{G_x} \to \mathrm{Fib}_G$$

qui induit un homomorphisme entre les groupes de composantes connexes

$$(\Lambda/\mathbf{Z}\Phi^\vee)_{\rho^{\mathrm{Out}}\,(\Gamma_{F_x})} \to (\Lambda/\mathbf{Z}\Phi^\vee)_{\rho^{\mathrm{Out}}\,(\Gamma_F)}$$

Celui-ci est bien entendu l'homomorphisme qui se déduit du fait que le groupe de Galois local Γ_{F_x} est un sous-groupe du groupe de Galois global Γ_F bien défini à conjugaison près.

Le groupe des composantes connexes de Fib_G est aussi relié aux groupes de cohomologie galoisienne considérés dans l'exposé précédent. En effet, le conoyau $\mathrm{coker}^1\,(F, G)$ de la suite exacte globale-locale s'identifie au sous-groupe de torsion de $\pi_0(\mathrm{Fib}_G)_\sigma$ où σ est le générateur de Γ_k. L'intérêt majeur des groupes des composantes connexes de Fib_G est qu'ils forment une famille lorsque G varie en famille à la différence des groupes de cohomologie galoisienne.

Il existe un sous-champ ouvert particulièrement intéressant de Fib_G qui consiste en des G-fibrés stables. Un fibré vectoriel V sur une courbe X est dit « stable » au sens de Mumford si pour tout sous-fibré strict W de V on a

$$\frac{\deg(W)}{\mathrm{rk}(W)} < \frac{\deg(V)}{\mathrm{rk}(V)}$$

Un G-fibré E/X est dit « stable » si le fibré vectoriel $\mathrm{ad}(E)$, qui est obtenu de E par la représentation adjointe de G, est stable au sens de Mumford. Comme dans le cas des fibrés vectoriels, les G-fibrés stables forment un sous-champ ouvert Fib_G^{st} de Fib_G. Ce sous-champ ouvert est un champ de Deligne-Mumford. L'espace de module des G-fibrés stables est alors l'espace algébrique sous-jacent du champ de Deligne-Mumford Fib_G^{st} au sens de Keel-Mori [17].

FIBRÉS DE HIGGS ET MORPHISME DE HITCHIN

La théorie des invariants de l'action adjointe

Un G-fibré de Higgs sur une courbe X est un couple (E, φ) où E est un G-fibré sur X et

$$\varphi \in \mathrm{H}^0(X, \mathrm{ad}(E) \otimes L)$$

est une section du fibré adjoint de E tordu par un fibré en droites L donné (L est le fibré canonique de X dans la définition de Hitchin). Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n$, un fibré de Higgs est couple (V, φ) où V est un fibré vectoriel de rang n sur X et $\varphi : V \to V \otimes L$ est un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}_L$ le tordu de $\mathfrak{g}$ par le $\mathbb{G}_m$-torseur associé à L, un G-fibré de Higgs est donc une section du morphisme $[\mathfrak{g}_L/G] \to X$. On considère le champ $\mathcal{M}$ des G-fibrés de Higgs qui est muni d'un morphisme de type fini $\mathcal{M} \to \mathrm{Bun}_G$.

Le champ $\mathcal{M}$ des G-fibrés de Higgs est en plus équipé d'une structure remarquable : le morphisme de Hitchin. Pour construire celui-ci, il nous faut rappeler la théorie des invariants pour l'action adjointe d'un groupe réductif G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ due à Chevalley et Kostant [18]. Soit G un groupe réductif sur un corps k. Nous supposons que G est déployé, et est donc muni d'un tore maximal T et d'un sous-groupe de Borel B contenant T défini sur k et que T est déployé. $W = N_G(T)/T$ est son groupe de Weyl. Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$. D'après Chevalley, la restriction de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{t}$ induit un isomorphisme d'algèbre $k[\mathfrak{g}]^G \xrightarrow{\sim} k[\mathfrak{t}]^W$. Autrement dit, l'immersion fermée $\mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ induit un isomorphisme entre les quotients au sens de la théorie des invariants :

$$\mathfrak{t}/\!/W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}/\!/G$$

Nous notons $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c} = \mathfrak{t}//W$ le morphisme de Chevalley qui s'en déduit. Comme l'action adjointe de G commute à l'action scalaire de $\mathbb{G}_m$, on obtient une action compatible de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathfrak{c}$. Si on note $\mathfrak{c}_L$ le tordu de $\mathfrak{c}$ par le $\mathbb{G}_m$-torseur L alors on a un morphisme

$$[\mathfrak{g}_L/\mathrm{G}] \to \mathfrak{c}_L$$

au-dessus de la courbe X. On en déduit un morphisme du champ $\mathcal{M}$ des sections de $[\mathfrak{g}_L/G] \to X$ vers le schéma $\mathcal{A}$ affine des sections de $\mathfrak{c}_L \to X$. C'est le morphisme de Hitchin

$$h : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

Dans le cas où G est un groupe réductif déployé on a $\mathfrak{c} = \mathrm{Spec}(k[a_1, ..., a_r])$ muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ avec $t(a_1, \ldots, a_r) = (t^{d_1} a_1, \ldots, t^{d_r} a_r)$. On a alors $\mathfrak{c}_L = L^{d_1} \oplus \cdots \oplus L^{d_r}$ de sorte que $\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^n H^0(X, L^{d_i})$.

Fibres de Hitchin

Dans le cas des fibrés de Higgs pour $G = \mathrm{GL}_n$, la base du morphisme de Hitchin est $\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^n \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes i})$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, suivant Hitchin [14] on peut construire une courbe spectrale Y_a tracée sur l'espace total du fibré en droites L. Le morphisme $p_a : Y_a \to X$ qui s'en déduit est un morphisme fini de degré n. Lorsque deg(L) est assez grand, la courbe spectrale Y_a est lisse et irréductible pour un point $a \in \mathcal{A}$ général. Dans ce cas, la fibre de Hitchin $\mathcal{M}_a$ peut être identifiée au champ de Picard $\mathrm{Pic}(Y_a)$ classifiant des fibrés en droites de Y_a. Lorsque Y_a est une courbe intègre, on peut encore identifier $\mathcal{M}_a$ au schéma de Picard compactifié $\overline{\mathrm{Pic}}(Y_a)$ classifiant des fibrés sans torsion de rang générique un sur Y_a d'après Beauville, Harder et Narasimhan. Dans le cas $a \in \mathcal{A}$ quelconque, on n'a plus de description simple de $\mathcal{M}_a$ en termes de courbe spectrale, mais il y a encore une action de $\mathrm{Pic}(Y_a)$ sur $\mathcal{M}_a$ avec une orbite ouverte $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ isomorphe à $\mathrm{Pic}(Y_a)$.

C'est cette dernière propriété qu'on va généraliser à un groupe réductif quelconque. Nous allons construire un champ de Picard relatif $\mathcal{P} \to \mathcal{A}$ agissant sur la fibration de Hitchin $\mathcal{M} \to \mathcal{A}$ où $\mathcal{M}$ est le champ classifiant des G-fibrés de Higgs. La construction de $\mathcal{P}$ est fondée sur le centralisateur régulier. Soit $I \to \mathfrak{g}$ le schéma en groupes des centralisateurs. La fibre de I au-dessus d'un point $x \in \mathfrak{g}$ est

$$I_x = \{g \in G | \mathrm{ad}(g)x = x\}$$

Notons $\mathfrak{g}^{rs}$ l'ouvert de $\mathfrak{g}$ des éléments réguliers semi-simples. Pout tout $X \in \mathfrak{g}^{rs}$, la fibre I_x au-dessus de x est un tore maximal de G dont la dimension est égale au rang de G. Nous notons $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ l'ouvert de $\mathfrak{g}$ des points $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\dim(I_x) = r$. La restriction du morphisme caractéristique $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ à $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ est lisse. Les fibres du morphisme $\chi^{\mathrm{reg}} : \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{c}$ sont alors des espaces homogènes sous l'action de G. D'après Kostant, on peut construire une section du morphisme $\chi^{\mathrm{reg}} : \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{c}$ à partir de chaque épinglage de G. On définit le centralisateur régulier J sur $\mathfrak{c}$ comme la restriction de I à une section de Kostant. C'est un schéma en groupes lisses sur $\mathfrak{c}$ indépendant du choix de la section de Kostant et qui est caractérisé par la proposition suivante : il existe un unique schéma en groupes lisses J au-dessus de la base de Chevalley $\mathfrak{c}$ muni d'un isomorphisme G-équivariant $\chi^{\mathrm{reg}*}\ J \xrightarrow{\sim} I|_{\mathfrak{g}^{reg}}$. De plus, cet isomorphisme s'étend de façon unique en un homomorphisme de schémas en groupes $\chi^* J \to I$.

Comme le centralisateur régulier $J \to \mathfrak{c}$ est $\mathbb{G}_m$-équivariant, après torsion par le fibré en droites L, on obtient un schéma en groupes lisse commutatif $J_L \to \mathfrak{c}_L$. Pour tout point $a \in \mathcal{A}$, on définit le schéma en groupes $J_a \to X$ par produit fibré. L'homomorphisme de schéma en groupes $\chi^* J \to I$ au-dessus de $\mathfrak{g}$ induit alors une action du champ de Picard $\mathcal{P}_a$ représentant le groupoïde de J_a-torseurs sur X sur la fibre de Hitchin $\mathcal{M}_a$. Cette action se spécialise à l'action de $\mathrm{Pic}(Y_a)$ sur $\mathcal{M}_a$ dans le cas $G = GL_n$. Ces actions se mettent en famille : on a un champ de Picard relatif $\mathcal{P} \to \mathcal{A}$ agissant sur la fibration de Hitchin $\mathcal{M} \to \mathcal{A}$.

Notons $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$ le sous-groupoïde $\mathcal{M}^{\mathrm{reg}}$ de $\mathcal{M}$ qui consiste en des sections de $[M_L^{\mathrm{reg}}/G] \to X$ est un sous-champ ouvert de $\mathcal{M}$ invariant sous l'action de $\mathcal{P}$. Si le fibré en droite L admet une racine carré, $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ est non vide pour tout a et c'est un espace principal homogène sous l'action de a. Dans ce cas, $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ est dense dans $\mathcal{M}_a$ et en particulier on a une bijection entre le groupe des composantes connexes de $\mathcal{P}_a$ et l'ensemble des composantes irréductible de $\mathcal{M}_a$.

Déformations des fibrés de Higgs

La théorie de déformation des fibrés de Higgs a été traitée par [4]. Il s'ensuit que si $\deg(L)$ est assez grand, le champ de module des fibrés de Higgs $\mathcal{M}$ est lisse sur k.

Fibration de Hitchin généralisée

Il est possible d'étendre la construction de la fibration de Hitchin à une situation très générale où G est un schéma en groupes lisses type fini sur X dont la fibre générique est réductive, et M est un X-schéma affine muni d'une action de G. On a alors le morphisme $[M/G] \to M/\!/G = A$ du quotient de M par G au sens des champs algébriques vers le quotient de M par G au sens de la théorie des invariants. On a un morphisme $h : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ qui s'en déduit du champ $\mathcal{M}$ des sections de $[M/G] \to X$ vers le schéma $\mathcal{A}$ des sections $A \to X$. Bien entendu, pour pouvoir étudier le morphisme de Hitchin, il faut tout d'abord des renseignements sur le quotient invariant $M/\!/G$. Signalons le travail de Luna-Richardson qui va dans cette direction. Notons que, sauf dans le cas où A est un fibré vectoriel sur X, l'espace des sections de $A \to X$ pourrait être très compliqué.

Les considérations ci-dessus sur le centralisateur régulier se généralisent sous certaines hypothèses. Soit M un X-schéma de type fini muni d'une action d'un schéma en groupes réductifs $G \to X$. Soit $M/\!/G$ le quotient au sens des invariants relativement à X. Supposons qu'il existe un ouvert M^{reg} de M tel que le stabilisateur I

est un schéma en groupes lisse et commutatif sur M^{reg}, et que le morphisme $M^{\mathrm{reg}} \to M /\!/ G$ est lisse et surjectif. Supposons aussi que le lieu où les fibres de $M^{\mathrm{reg}} \to M /\!/ G$ ne sont pas connexes est de codimension au moins deux, alors on peut encore construire un schéma en groupes, dit le stabilisateur régulier, J sur $M /\!/ G$ et un homomorphisme G-équivariant $\chi^* J \to I$. Dans cette situation, on peut encore construire un champ de Picard relatif $g : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ qui agit sur la fibration de Hitchin généralisée $h : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ et supposer que $M /\!/ G$ est un schéma lisse au-dessus de X et que le morphisme $M \to M /\!/ G$ est plat surjectif. Si $\mathcal{M}$ est le champ des sections de $[M/G] \to X$, alors on a un morphisme de Hitchin généralisé $\mathcal{M} \to \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ le schéma des sections de $M /\!/ G \to X$.

L'exemple typique de cette situation est le cas où M est le monoïde universel de Vinbert associé à un groupe semi-simple simplement connexe G qui est muni de l'action de G par conjugaison. Dans ce cas, le groupoïde $\mathcal{M}$ peut être vu comme l'interprétation géométrique du côté orbital de la formule des traces. Plus généralement, on pourrait considérer l'action d'un groupe G sur le produit $X_1 \times X_2$ de deux variétés symétriques ou plus généralement sphériques. Dans cette situation toutefois, les hypothèses ci-dessus ne sont plus satisfaites. Il devrait être possible de construire l'action d'un champ de Picard sur la fibration de Hitchin générale en apportant des modifications nécessaires à l'ébauche précédente.

FIBRES DE SPRINGER AFFINES ET LA FORMULE DE PRODUIT

Fibres de Springer affines

Soit G un groupe réductif défini sur k le corps de base et $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément régulier semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G à valeurs dans le corps $F = k((t))$ des séries formelles de Laurent dont $\mathcal{O} = k[[t]]$ est l'anneau des entiers.

Suivant Kazhdan et Lusztig [16], nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{M}_\gamma^\bullet(k) = \{ g \in G(F)/G(\mathcal{O}) | \mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma) \in \mathcal{G}(\mathcal{O}) \}$$

qui est en fait l'ensemble des k-points d'un k-schéma $\mathcal{M}_\gamma^\bullet$ localement de type fini défini sur k, qui est sous-schéma fermé de la grassmannienne affine de G. Dans le cas $G = \mathrm{GL}_n$, l'élément $\gamma : F^n \to F^n$ est un endomorphisme régulier semi-simple de F^n et l'ensemble $\mathcal{M}_\gamma^\bullet(k)$ peut être identifié à l'ensemble des réseaux $\mathcal{V} \subset F^n$ tels que $\gamma(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$. On a bien entendu des interprétations analogues dans les cas des groupes classiques en termes de réseaux auto-duaux. Nous notons aussi que la définition ci-dessus a un sens pour tout schéma en groupes G lisses de type fini sur $\mathcal{O}$ et nous nous intéressons particulièrement au cas où la fibre générique de G est réductive.

Considérons le morphisme de Chevalley $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c} = \mathfrak{g} /\!/ G$ et notons $a \in \mathfrak{c}(F)$ l'image de $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$. Pour que la fibre de Springer affine $\mathcal{M}_\gamma^\bullet$ soit non vide, il est nécessaire que $\gamma \in \mathfrak{c}(\mathcal{O})$. Supposons que nous avons une section de Kostant $\kappa : \mathfrak{c} \to \mathfrak{g}$. Partant d'un élément $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O})$, nous avons alors un élément $\kappa(a) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ et nous posons $\mathcal{M}_a^\bullet = \mathcal{M}_{\kappa(a)}^\bullet$ qui est une variante des fibres de Springer affines ne dépendant que d'un polynôme caractéristique a au lieu d'un élément de l'algèbre de Lie. Si k est un corps algébriquement clos, γ et $\kappa(a)$ sont conjugués sous $G(F)$ si bien que $\mathcal{M}_{\kappa(a)}^\bullet$ et $\mathcal{M}_\gamma^\bullet$ sont isomorphes si $a = \kappa(\gamma)$ mais il n'y a pas d'isomorphisme canonique.

Soit $J_a = a^* J$ la restriction du centralisateur régulier J à la section $a : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to \mathfrak{c}$. Par construction du centralisateur régulier, $J_a(F)$ est le centralisateur de $\kappa(a)$ dans $G(F)$, de sorte que $J_a^\bullet(F)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{M}_\gamma^\bullet(k)$. Il résulte de l'homomorphisme de schéma en groupes $\chi^* J \to I$ que $J_a(\mathcal{O})$ agit trivialement sur $\mathcal{M}_\gamma^\bullet(k)$, de sorte qu'on a une action de $J_a(F)/J_a(\mathcal{O})$ sur $\mathcal{M}_\gamma^\bullet(k)$. Géométriquement, on a une action de la grassmannienne affine $\mathcal{P}_a^\bullet$ de J_a sur la fibre de Springer affine $\mathcal{M}_a^\bullet$. En remplaçant $\mathfrak{g}$ par l'ouvert $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ dans la définition de la fibre de Springer affine, on obtient un ouvert $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{reg}}$ de $\mathcal{M}_a^\bullet$ sur lequel $\mathcal{P}_a^\bullet$ agit simplement transitivement.

La définition des fibres de Springer affines se généralise sans difficulté au cas d'un schéma en groupes lisses définis sur le disque formel. Soit $G \to D_x$ un schéma en groupes lisse de type fini sur $D_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ où $\mathcal{O}_x = k[[\varpi_x]]$ dont la fibre générique est un groupe réductif connexe. Nous avons alors défini la grassmannienne affine $\mathcal{Q}_G$ de G. Pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}(F_x)$, nous définissons la fibre de Springer affine associée à γ comme le sous-ind-schéma fermé $\mathcal{M}_\gamma^x$ de $\mathcal{Q}_G$ dont les k-points sont $g \in G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$ tels que $ad(g^{-1})\,\gamma \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)$. Dans le cas où $G = G^{\mathrm{Iw}}$ est le schéma en groupes de type iwahorique associé un sous-groupe d'Iwahori de $G(F_x)$, Kazhdan et Lusztig ont démontré que la fibre de Springer affine $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{Iw}}$ correspondante est équidimensionelle. De plus, le morphisme $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{Iw}} \to \mathcal{M}_a^\bullet$ est projectif et surjectif, et il est fini exactement au-dessus de l'ouvert $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$, si bien que le complémentaire de $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{reg}}$ dans $\mathcal{M}_a^\bullet$ est de dimension strictement plus petite que celle de $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{reg}}$. Il s'ensuit que la dimension de $\mathcal{M}_a^\bullet$ est égale à la dimension de l'ouvert $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{reg}}$. De plus, nous savons que l'ouvert $\mathcal{M}_a^{\bullet\mathrm{reg}}$ est dense dans $\mathcal{M}_a^\bullet$ par la comparaison des fibres de Springer affines aux fibres de Hitchin *via* la formule de produit.

La formule de produit

Revenons à la situation de la fibration de Hitchin. Au-dessus d'une courbe X projective lisse sur un corps k, nous avons un schéma en groupes réductifs $G \to X$, son algèbre de Lie $\mathfrak{g} \to X$ et la tordue $\mathfrak{g}_L$ de $\mathfrak{g}$ par un fibré en droite L. Le quotient au sens de la théorie des invariants de $\mathfrak{g}$ par G est noté $\mathfrak{c}$ qui peut être tordu par L et l'espace tordu $\mathfrak{c}_L$ est le quotient de $\mathfrak{g}_L$ par G. Supposons que L a une racine carrée, la section de Kostant $\mathfrak{c} \to \mathfrak{g}$ induit aussi une section $\mathfrak{c}_L \to \mathfrak{g}_L$. L'espace de module $\mathcal{M}$ est le champ algébrique qui classifie les sections de

$$[\mathfrak{g}/G] \to X$$

et le morphisme de Hitchin envoie une section de $[\mathfrak{g}_L/G \to X]$ sur une section de $\mathfrak{c}_L \to X$.

Soit $a : X \to \mathfrak{c}_L$ une section génériquement régulière semi-simple. Elle envoie le point générique η et X dans l'ouvert $\mathfrak{c}_L^{rss}$ complémentaire au diviseur discriminant. On a défini un champ de Picard $\mathcal{P}_a$ agissant sur la fibre de Hitchin $\mathcal{M}_a$ du morphisme de Hitchin au-dessus de a. En se donnant une racine carrée de L, on a un point de Kostant $\kappa(a) \in \mathcal{M}_a$. Le point de Kostant nous permet d'établir un rapport entre la fibre de Hitchin $\mathcal{M}_a$ et les fibres de Springer affines $\mathcal{M}_a^v$ qui en sont des analogues locaux. Soit $X'_a = a^{-1}(\mathfrak{c}_L^{rss})$ l'ouvert dense de X qui consiste en des points $x \in X$ tels que $a(x) \in \mathfrak{c}_L^{rss}$. Le théorème de recollement formel de Beauville-Laszlo implique qu'on a un morphisme

$$\prod_{x \in X - X'_a} \mathcal{M}_{a_x}^{\bullet} \to \mathcal{M}_a$$

qui consiste à recoller les sections $D_x \xrightarrow{m_v} [\mathfrak{g}_L/G]$ avec $x \in X - X'_a$ avec la section de Kostant sur l'ouvert X'_a en utilisant des isomorphismes entre m_v et la section de Kostant sur les disques pointés $D_x^{\bullet}$ fournis par les données inhérentes aux fibres de Springer affines. Les groupes $\prod_{x \in X-U} \mathcal{P}_{a_x}^{\bullet}$ et $\mathcal{P}_a$ agissent sur $\prod_{x \in X} \mathcal{M}_{a_x}^{\bullet}$ et $\mathcal{M}_a$ respectivement de façon compatible de sorte qu'on a un morphisme.

$$\prod_{x \in X-U} \mathcal{M}_{a_x}^{\bullet} \times^{\prod_{x \in X-U} \mathcal{P}_{a_x}^{\bullet}} \mathcal{P}_a \to \mathcal{M}_a$$

Proposition : pour toute section $a : X \to \mathfrak{c}_L$ qui envoie le point générique de x dans l'ouvert régulier semi-simple $\mathfrak{c}_L^{rss}$, le morphisme ci-dessus est un homéomorphisme universel.

Le théorème de recollement formel de Beauville-Laszlo garantit que le morphisme ci-dessus induit une équivalence de catégorie sur les groupoïdes des k-points. Lorsque a est anisotrope, la source et le but du morphisme sont tous les deux des champs de Deligne-Mumford propres, de sorte que l'équivalence entre des groupoïdes des k-points implique que le morphisme est un homéomorphisme universel. Cela a été démontré par Bouthier et Cesnavicius [5], sous l'hypothèse générale que $a : X \to \mathfrak{c}_L$ qui envoie le point générique de x dans l'ouvert régulier semi-simple $\mathfrak{c}_L^{rss}$.

Notons que, comme $\mathcal{M}$ et $\mathcal{A}$ sont lisses et que les fibres de Hitchin sont toutes de dimension $\dim(\mathcal{M}) - \dim(\mathcal{A})$, elles sont des intersections complètes locales. Il s'ensuit qu'elles ne peuvent pas avoir de composantes irréductibles de dimension plus petite que sa dimension. En combinant avec l'inégalité de Kazhdan-Lusztig pour les fibres de Springer affines et la formule de produit, on conclut que le lieu régulier aussi bien dans les fibres de Hitchin que dans les fibres de Springer affines est dense.

Comptage de points et préstabilisation

La formule de produit nous permet de compter des fibrés de Higgs de la façon esquissée dans la section 1. En effet, la formule de produit reliant une fibre de Hitchin aux fibres de Springer affines peut aussi formulée comme une équivalence de groupoïdes

$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k) \simeq \prod_{x\in|X|} [\mathcal{M}^\bullet_{a_x}/\mathcal{P}^\bullet_{a_x}](k)$$

Supposons que le corps de base k est un corps fini. Après avoir choisi un isomorphisme $L = \mathcal{O}_X(\mathrm{D})$ avec $D = \sum d_x x$, on peut exprimer la masse du groupoïde $[\mathcal{M}^\bullet_a/\mathcal{P}^\bullet_a](k)$ comme une intégrale orbitale stable

$$\mathrm{SO}_a(1_{\mathfrak{g}(O_x)}) = \sum_{\substack{\gamma\in\mathfrak{g}(F_x)/\mathrm{conj}\\ \chi(\gamma)=a}} \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} 1_{t_x^{-d_x}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)}(\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma)\frac{dg}{dg_\gamma}$$

où t_x est un uniformisant local de X en x et les mesures de Haar dg et dg_γ sont normalisées telles que $\mathrm{vol}(G(\mathcal{O}_x), dg) = 1$ et $\mathrm{vol}(J_a(\mathcal{O}_x), dg_\gamma) = 1$. On a donc l'égalité

$$\left|[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)\right| = \prod_{x\in|X|} \mathrm{SO}_a\left(1_{t_x^{-d_x}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)}\right) = \mathrm{SO}_a(1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_D)})$$

sous l'hypothèse que a est génériquement régulier semi-simple.

Nous souhaitons avoir une formule pour la masse du groupoïde $|\mathcal{M}_a(k)|$, laquelle est finie sous l'hypothèse que a est anisotrope. Un comptage à la Weil nous donne la formule

$$|\mathcal{M}_a(k)| = \sum_{\xi\in\ker^1(F,G)} \sum_{\substack{\gamma\in\mathfrak{g}^\xi(F)/\mathrm{conj.}\\ \chi(\gamma)=a}} \int_{G_\gamma(F)\backslash G(\mathbb{A})} 1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_D)}(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

où $\mathcal{O}_D$ les le sous-groupe compact de $\mathbf{A}$ associé à un diviseur D tel que $\mathcal{O}_X(D) = L$. Pour être utile, cette formule à la Weil doit être préparée *via* la « préstabilisation » de Langlands [21] et Kottwitz [19]. Cette préstabilisation peut être reformulée dans notre langage comme suit. Considérons le morphisme de groupoïdes

$$\mathcal{M}_a(k) \to [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)$$

Il n'est pas surjectif en général car pour que la fibre au-dessus de $y \in [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a](k)$ soit non vide, il faut et il suffit que la classe cohomologique

$$\mathrm{inv}(y) \in H^0(k, \mathcal{P}_a) = \pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma$$

soit nulle. En opérant une transformation de Fourier sur le groupe abélien fini $\pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma$, on obtient la formule suivante :

$$|\mathcal{M}_0(k)| = |\mathcal{P}_a^0(k)| \sum_{\kappa:\pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma \to \mathbf{C}^*} \prod_{x\in|X|} O_a^\kappa(1_{t_x^{-d_x}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)})$$

où la κ-intégrale orbitale O_a^κ est

$$O_a^K(1_{\mathfrak{g}(\mathcal{O}_{D,x})}) = \sum_{\substack{\gamma\in\mathfrak{g}(F_x)/conj.\\ \chi(\gamma)=a}} \langle \mathrm{inv}(\gamma),\kappa\rangle \int_{G_\gamma(F_x)\backslash G(F_x)} 1_{t_x^{-dx}\mathfrak{g}(\mathcal{O}_x)}(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma}$$

La formule de $|\mathcal{M}_a(k)|$ qui en résulte est la préstabilisation du comptage de points de la fibre de Hitchin. Elle exprime ce nombre comme une somme finie indexée par le groupe $\pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma$, généralement assez petit, d'intégrales sur la classe de conjugaison stable adélique de a. La stabilisation proprement dite consiste en transformant les κ-intégrales orbitales en intégrales orbitales stables des groupes endoscopiques. C'est le contenu du lemme fondamental et transfert endoscopique conjecturés par Langlands [21].

Fibres de Springer affines généralisées

On peut construire des fibres de Springer affines généralisées dans les hypothèses faites dans la partie sur les « Déformations des fibrés de Higgs » . Supposons qu'on a en plus une section $M/\!/G \to [M/G]$ du morphisme naturel $[\kappa] : [M/G] \to M/\!/G$. Pour tout morphisme $a : X_x \to A$ du disque formel X_x dans $A = M/\!/G$, on a un relèvement $[\kappa(a)] : X_x \to [M^{\mathrm{reg}}/G]$. La fibre de Springer affine $\mathcal{M}_a^\bullet$ consiste alors en des morphismes $X_x \to [M^{\mathrm{reg}}/G]$ au-dessus de a muni d'un isomorphisme avec $[\kappa(a)]$ au-dessus du disque formel $X_x^\bullet$. On peut construire $\mathcal{P}_a^\bullet$ comme la grassmannienne de J_a qui est une action de $\mathcal{P}_a^\bullet$ sur $\mathcal{M}_a^\bullet$. Dans le cas du monoïde de Vinberg, Jingren Chi a montré dans sa thèse que $\mathcal{P}_a^\bullet$ agit simplement mais pas transitivement sur l'ouvert $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$, mais pire encore, $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ peut ne pas être dense dans $\mathcal{M}_a^\bullet$. On a toutefois encore une formule de produit et celle-ci a aidé Jingren Chi a montré que $\dim(\mathcal{M}_a^\bullet) = \dim(\mathcal{P}_a^\bullet)$ même si $\mathcal{M}_a^\bullet$ peut avoir des composantes irréductibles dans lesquelles l'action de $\dim(\mathcal{P}_a^\bullet)$ se factorise par un quotient de dimension plus petite.

STRATIFICATION DE $\mathcal{A}$ RELATIVE AUX STRUCTURES DE $\mathcal{P}_a$

Pour tout $a : X \to \mathfrak{c}_L$ qui envoie le point générique de X dans l'ouvert régulier semi-simple de $\mathfrak{c}_L$, le schéma en groupes $J_a = a^*J$ est un schéma en groupes lisses commutatifs dont la fibre générique est un tore. Nous pouvons alors décrire la structure du champ de Picard $\mathcal{P}_a$ des J_a-torseurs en fonctions de a, en particulier son groupe des composantes connexes et la dimension de sa partie affine.

Description galoisienne du centralisateur régulier

Pour élucider la structure de $\mathcal{P}_a$ et en donner des descriptions explicites, nous devons rappeler la description galoisienne du centralisateur régulier du à Donagi et Gaitsgory [9].

Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie du tore maximal T et $T \times \mathfrak{t}$ le schéma en groupes constant de fibre T au-dessus de t. Nous considérons $\pi_*(T \times \mathfrak{t})$ sa restriction à la Weil le long du morphisme fini et plat $\pi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{c}$ qui est un schéma en groupes lisses sur $\mathfrak{c}$ de dimension relative $|W|\dim(T)$. Il est, de plus, muni d'une action de W induite de l'action diagonale de W sur $T \times \mathfrak{t}$. Notons $J^1 = \pi_*(T \times t)^W$ le sous-schéma en groupes des points fixes sous l'action de W. Notons J^0 le sous-schéma en groupes ouvert de J^1 ayant les fibres connexes. D'après Donagi et Gaitsgory, on a alors des homomorphismes de schémas en groupes qui sont des immersions ouvertes

$$J^0 \to J \to J^1$$

Pour décrire le sous-schéma en groupes ouvert J de J^1, il suffit donc d'expliciter les faisceaux finis J/J_0 et J^1/J. Comme J est affine et normal, il suffit de le décrire au-dessus du complémentaire d'un fermé de codimension 2. On peut le faire après avoir tiré ces faisceaux sur $\mathfrak{t}$. Au-dessus de $\mathfrak{t}$, les morphismes $J^0 \to J \to J^1$ sont des isomorphismes de tores en dehors de la réunion des hyperplans des racines h_α. Sur le point générique de h_α, J/J^0 est isomorphe à $\ker(\alpha : \mathbb{G}_m \to T^\vee)$ et J^1/J est isomorphe à $\ker(\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to T)$ où $T^\vee$ est le tore dual de T et $\alpha^\vee$ est la coracine associée à la racine α. En particulier, si G est adjoint, on a $J = J^0$, et si G est semi-simple simplement connexe, on a $J = J^1$.

Composantes connexes du champ de Picard $\mathcal{P}_a$

Supposons que G est adjoint, dans le cas où les fibres du centralisateur régulier J sont connexes. Dans ce cas, le groupe des composantes connexes $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ ne dépend que de la monodromie de la fibre générique de J_a. Pour le décrire, nous fixons un point géométrique de $x \in X'_a = a^{-1}(\mathfrak{c}_L^{\mathrm{rs}})$ et un point géométrique $\tilde{x}$ de la courbe camérale $X \times_{\mathfrak{c}_L} \mathfrak{t}_L$ au-dessus de X. Nous notons $\tilde{a} = (a, \tilde{x})$. Notons $Y_{\tilde{a}}$ la composante irréductible de $\tilde{X}_a$ passant par $\tilde{x}$. Nous considérons le sous-groupe $\Sigma_{\tilde{a}}$ du groupe de Weyl W qui stabilise Y_a. Sous l'hypothèse que le centre de G est connexe, on a un isomorphisme canonique

$$\pi_0(\mathcal{P}_a) = \Lambda_{\Sigma_{\tilde{a}}}$$

où Λ est le groupe des cocaractères du tore maximal T. La description de $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ est plus compliquée dans le cas où le centre de G n'est pas connexe, mais il est néanmoins toujours un quotient de $\Lambda_{\Sigma_{\tilde{a}}}$ qui admet la description endoscopique suivante : un point $s \in \hat{T}$ du tore dual complexe de T qui définit un caractère $s : \Lambda \to \mathbf{C}^\times$. Ce caractère se factorise à travers le quotient $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ si et seulement si a provient d'une classe de conjugaison stable d'un groupe endoscopique non ramifié H dont le dual complexe $\hat{H}$ est le centralisateur connexe de s.

Comme l'invariant $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ est semi-continu supérieurement, en imposant que $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ soit constant sur les strates, on peut définir une stratification de l'ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}_x$ de $\mathcal{A}$ des couples $\tilde{a}=(a,\tilde{x})$ avec $\tilde{x}$ qui est un point non ramifié de la courbe camérale au-dessus d'un point $x \in X$ fixé. En fait, il est plus agréable de stratifier par $s \in \hat{T}$ et en demandant que $s : \Lambda \to \mathbf{C}^\times$ se factorise par $\pi_0(\mathcal{P}_a)$. On obtient ainsi des sous-schémas fermés de $\tilde{\mathcal{A}}$ qui ne sont autres que les $\tilde{\mathcal{A}}_H$ où H parcourt l'ensemble des sous-groupes endoscopiques non ramifiés de G, voir [25].

L'invariant δ_a

On dit qu'un point géométrique $a \in \mathcal{A}$ est anisotrope si $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ est fini. Dans ce cas, $\mathcal{P}_a$ est un champ de Picard qui est un champ de Deligne-Mumford de type fini. La composante neutre $\mathcal{P}_a^0$ de $\mathcal{P}_a$ est alors isomorphe au produit d'un groupe algébrique commutatif connexe P_a et le classifiant du groupe fini $I_{\mathcal{P}_a}$ qui est le groupe d'inertie de l'élément neutre. D'après le théorème de structure de Chevalley, P_a est l'extension d'une variété abélienne A_a par un groupe affine connexe R_a dont on note δ_a la dimension. Par la formule de produit, l'invariant δ_a est égal à la somme des dimensions des groupes de Picard locaux

$$\delta_a = \sum_{x \in X \setminus U} \dim(\mathcal{P}_{a_x}^\bullet)$$

On a une formule pour $\delta_{a_x} = \dim(\mathcal{P}_{a_x}^\bullet)$ due à Bezrukavnikov [3]

$$\delta_{a_x} = \frac{d_{a_x} - c_{a_x}}{2}$$

où $d_{a_x} = \deg_x(a^*\mathrm{discr})$ est le degré en x du diviseur discriminant $a^*\mathrm{discr}$ et c_x est un invariant galoisien $c_{a_x} = \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{t}^{\Sigma_{a_x}})$ où Σ_{a_x} est le groupe de monodromie locale de la restriction $J_{a_x}^\bullet = J_a|_{X_x^\bullet}$ de J_a au disque formel pointé en x.

Comme l'invariant δ_a est semi-continu supérieurement, nous avons une stratification δ-constante $\mathcal{A}_\delta$ de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{P} \to \mathcal{A}$ est δ-régulier si $\mathrm{codim}(\mathcal{A}_\delta) \geq \delta$ pour tout $\delta \in \mathbf{N}$. Lorsque le corps de base k est de caractéristique zéro, δ-régularité peut être démontrée par un argument sur les vecteurs tangents [26]. En caractéristique positive, on peut le démontrer par voie locale en s'appuyant sur un résultat de Goresky-Kottwitz-MacPherson [11], sous l'hypothèse que δ soit petit par rapport à $\deg(L)$, voir [25].

Dualité

Lorsque la section $a : X \to \mathfrak{c}_L$ coupe le diviseur discriminant transversalement c'est-à-dire $d_{a_x} \leq 1$ for tout point $x \in X$, on a $\delta_{a_x} = 0$. Il s'ensuit que $\delta_a = 0$. Cela implique que la partie affine R_a de P_a est triviale. En fait, il existe un isomorphisme $\mathcal{P}_a = B_{I\mathcal{P}_a} \times A_a \times \pi_0(\mathcal{P}_a)$ où A_a est une variété abélienne, $B_{I\mathcal{P}_a}$ est le classifiant du groupe d'inertie $I_{\mathcal{P}_a}$ qui est fini.

Si G et $\hat{G}$ sont des groupes semi-simples duaux au sens de Langlands, on a un isomorphisme $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_{\hat{G}}$ bien défini modulo un scalaire. D'après Donagi-Pantev [10] si $k = \mathbf{C}$ et Chen-Zhu [8] en général, on sait que pour $a : X \to \mathfrak{c}_L$ transversal au discriminant, les champs de Picard $\mathcal{P}_a^G$ et $\mathcal{P}_a^{\hat{G}}$ sont duaux dans le sens que

$$\mathcal{P}_a^{\hat{G}} = \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_a^G, B\mathbb{G}_m)$$

Ceci revient à dire que les variétés abéliennes $\mathcal{A}_a^G$ et $\mathcal{A}_a^{\hat{G}}$ sont duales l'une de l'autre et que les groupes finis $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ et $I_{\mathcal{P}_a^{\hat{G}}}$ sont duaux et vice versa.

Notons qu'on peut utiliser les descriptions des faisceaux finis J^1/J et J/J^0 pour réduire au cas G est semi-simple simplement connexe et $\hat{G}$ est adjoint. Dans ce cas, la dualité résulte de ce que, dans un certain sens, $\mathcal{P}_a^G$ est la partie W-invariante du champ de Picard des T-torseurs sur la courbe camérale lisse $\tilde{X}_A$, et $\mathcal{P}_a^{\hat{G}}$ est la partie W-coinvariante du champ de Picard des $\hat{T}$-torseurs sur $\tilde{X}_a$ et que l'autodualité de la jacobienne implique que les champs des T-torseurs et des $\hat{T}$-torseurs sur $\tilde{X}_a$ sont en dualité. En tout cas, la dualité entre les champs des T-torseurs et $\hat{T}$-torseurs sur $\tilde{X}_a$ induit un accouplement de $\mathcal{P}_a^G$ et $\mathcal{P}_a^{\hat{G}}$ à valeurs dans $B\mathbb{G}_m$. Pour démontrer que c'est un accouplement parfait, on utilise les faits que Bun_G est connexe, et qu'un accouplement entre variétés abéliennes est parfait si et seulement si l'accouplement induit sur les modules de Tate l'est.

FIBRÉS DE HIGGS STABLES

D'après Narasimhan et Seshadri, les fibrés vectoriels stables de degré 0 sur une courbe X projective et lisse sur $\mathbf{C}$ sont en bijection avec les représentations unitaires de $\pi_1(X)$. Hitchin a généralisé cette correspondance aux représentations de $\pi_1(X)$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui correspondent aux fibrés de Higgs stables. Les fibrés de Higgs stables forment un sous-champ du champ des fibrés stables qui est un champ de Deligne-Mumford dont l'espace sous-jacent supporte la correspondance de Hitchin.

Chaudouard et Laumon ont montré que le sous-champ des fibrés de Higgs stables a aussi une signification automorphe. Ils ont montré que les fibrés de Higgs ξ-stables forment un champ de Deligne-Mumford qui est propre au-dessus de l'ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}_x$ de $\mathcal{A}$. Ici, $\xi \in \Lambda_{\mathbf{R}}$ est un nouveau paramètre auxiliaire. Ils ont montré que le comptage de points sur $\mathcal{M}^{\xi-\mathrm{st}}$ correspond exactement au côté géométrique de la formule des traces régularisées d'Arthur et, par conséquent, est indépendant de ξ.

Il est commode d'utiliser les polyhèdres complémentaires de Behrend pour formuler le concept de ξ-stabilité. On considère les G-fibrés de Higgs $(E, \phi) \in \mathcal{M}$ d'image $a \in \mathcal{A}$ régulière semi-simple sur un ouvert non vide X'_a de X. Soit $x \in X'_a$ un point géométrique et $\tilde{x} \in \tilde{X}_a$ un point de la courbe camérale au-dessus de X. On note Y_a la normalisation de la composante irréductible de $\tilde{X}_a$ contenant $\tilde{x}$. Notons que la restriction du fibré de Higgs $(E, \phi) \in \mathcal{M}$ à $Y'_a = Y_a \times_X X'_a$ détermine un T-torseur E_{T, Y'_a} qui est une réduction de structure de $E|_{Y'}$. Pour tout sous-groupe de Borel B contenant T, on en déduit un B-torseur E_{B, Y'_a} sur Y' qui est une réduction de structure de $E|_{Y'_a}$. Par saturation, on en déduit un B-torseur E_{B, Y_a} sur Y_a qui est une réduction de structure de $E|_{Y_a}$ et qui étend E_{B, Y'_a}. Pour tout caractère $\lambda^\vee : T \to \mathbb{G}_m$, on en déduit un fibré en droites $E^{T, \lambda^\vee}_{B, Y_a}$ par changement de groupes de structures $B \to T \to \mathbb{G}_m$ et obtient donc un entier $\deg(E^{T, \lambda^\vee}_{B, Y_a}) \in \mathbf{Z}$ qui est additif en fonction de $\lambda^\vee$. Il existe alors un unique vecteur $v_B \in \Lambda_{\mathbf{R}} = \Lambda \otimes \mathbf{R}$ où Λ est le groupe des cocaractères de T tel que

$$\langle v_B , \lambda^\vee \rangle = \frac{\deg(E^{T, \lambda^\vee}_{B, Y_a})}{\deg(Y_a / X)}$$

La collection des points v_B forme un polyhère complémentaire au sens de Behrend [2]. En particulier, on a

$$\mathrm{Conv}(v_B, T \subset B) = \bigcap_{w \in W} (v_B + \Lambda_B^{++})$$

où Λ_B^{++} est le cône obtus associé à la paire de Borel (T, B).

La paire $\tilde{a} = (a, \tilde{x})$ détermine aussi un unique sous-groupe de Levi L contenant T d'un sous-groupe parabolique P contenant B tel que a provient de $a_{\mathrm{L}} \in \mathcal{A}_L$ un point elliptique dans la base de Hitchin de L. Si G est semi-simple, $a \in \mathcal{A}$ est anisotrope si et seulement si $L = G$. Notons $\Lambda^{\mathrm{ss}}_{L, \mathbf{R}}$ le sous-espace vectoriel de $\Lambda_{\mathbf{R}}$ engendré par les coracines de L. Chaudouard et Laumon ont introduit le convexe

$$\mathrm{CL}(E, \phi) = \mathrm{Conv}(v_B, T \subset B) + \Lambda^{\mathrm{ss}}_{L, \mathbf{R}}.$$

Étant donné un vecteur auxiliaire $\xi \in \Lambda_{\mathbf{R}}$, le fibré de Higgs (E, ϕ) est dit semi-stable si $\xi \in \mathrm{CL}(E, \phi)$, et stable si ξ est dans l'intérieur de $\mathrm{CL}(E, \phi)$ (G supposé semi-simple). En particulier, si a est anisotrope, le fibré de Higgs (E, ϕ) est automatiquement ξ-stable pour tout $\xi \in \Lambda_{\mathbf{R}}$.

Pour un vecteur ξ assez général, ces deux conditions sont équivalentes car le convexe $\mathrm{Conv}(v_B, T \subset B)$ est engendré par des points de coordonnées rationnelles. Chaudouard et Laumon ont démontré que, pour ξ général comme ci-dessus, le sous-champ des fibrés de Higgs ξ-stables forme un sous-champ ouvert qui est un champ de Deligne Mumford propre au-dessus de $\tilde{\mathcal{A}}_x$. Ils ont aussi montré que le comptage des fibrés de Higgs ξ-stables est indépendant de ξ et correspond à la formule des traces régularisées d'Arthur.

THÉORÈME DE SUPPORT

Lorsque G est un groupe semi-simple, le morphisme de Hitchin $h : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ est propre au-dessus de l'ouvert anisotropique $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$ de $\mathcal{A}$. Plus généralement, pour tout vecteur auxiliaire $\xi \in \Lambda_{\mathbf{R}}$ assez général, le sous-champ ouvert de $\mathcal{M}$ des fibrés de Higgs ξ-stables est propre au-dessus de son image dans $\mathcal{A}$. Rappelons aussi que le champ des fibrés de Higgs $\mathcal{M}$ est lisse du moment que $\deg(L)$ est assez grand. On est donc essentiellement dans la situation d'un morphisme $f : X \to S$ où X est un k-schéma lisse et f est un morphisme propre. Comme nous nous intéressons tout particulièrement aux nombres de points dans les fibres de f, nous souhaitons comprendre le complexe des faisceaux ℓ-adiques de l'image directe dérivée $f_*\mathbf{Q}_\ell$.

D'après le théorème de pureté de Deligne, $f_*\mathbf{Q}_\ell$ est un complexe pur. Il s'ensuit d'après le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber qu'il est isomorphe au-dessus de $S \otimes_k \overline{k}$ à une somme directe

$$f_*\mathbf{Q}_\ell = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K_\alpha\,[n_\alpha]$$

où $\mathfrak{A}$ est un ensemble fini, K_α est un faisceau pervers simple et $n_\alpha \in \mathbf{Z}$. Tout faisceau pervers simple K est le prolongement intermédiaire d'un système local irréductible défini sur une partie localement fermée irréductible dont nous appelons la « fermeture de Zariski » le support de K. On a donc un ensemble fini $\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Supp}(f_*\mathbf{Q}_\ell)$ de sous-schémas fermés irréductibles de $S \otimes_k \overline{k}$ que sont $Z_\alpha = \mathrm{Supp}(K_\alpha)$ avec $\alpha \in \mathfrak{A}$. Bien entendu, la même définition vaut pour $\mathrm{Supp}(K)$ pour n'importe quel complexe pur K.

La détermination de l'ensemble $\mathrm{Supp}(f)$ est un problème important tout aussi bien du point de vue géométrique qu'arithmétique. Supposons qu'on a deux morphismes propres $f_1 : X_1 \to S$ et $f_2 : X_2 \to S$ de sources lisses telles que $\mathrm{Supp}(f_1) = \mathrm{Supp}(f_2)$ est le singleton de $S \otimes_k \overline{k}$. Supposons aussi qu'il existe un ouvert dense S' de S tel que les fibres de f_1 et f_2 ont le même nombre de point au-dessus de n'importe quel point $s \in S'$, alors c'est aussi vrai pour n'importe quel point $s \in S$. En effet, l'hypothèse sur l'ensemble des supports implique que la classe d'isomorphisme de $f_*\mathbf{Q}_\ell$ est complètement déterminée par la restriction de $f_*\mathbf{Q}_\ell$ à n'importe quel ouvert non vide.

Le problème de déterminer l'ensemble des supports est essentiellement complètement résolu dans le cas de la fibration de Hitchin. Pour formuler la solution, il est plus commode d'opérer un changement de base à l'ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}_x$ de $\mathcal{A}$ au-dessus duquel le faisceau $\pi_0(\mathcal{P})$ des composantes connexes des fibres de $\mathcal{P}$ est un quotient du faisceau constant Λ. Il en résulte une action de Λ sur les faisceaux pervers de cohomologie ${}^p\mathrm{H}^i(f * \mathbf{Q}_\ell)$ et donc une décomposition en somme directe

$$ {}^p\mathrm{H}^i(f * \mathbf{Q}_\ell)|_{\mathcal{A}_x} = \bigoplus_\kappa ({}^p\mathrm{H}^i(f * \mathbf{Q}_\ell)|_{\mathcal{A}_x})_\kappa $$

où κ parcourt l'ensemble des caractères d'ordre fini $\kappa : \Lambda \to \overline{\mathbf{Q}_\ell}^\times$. D'après la description endoscopique de $\pi_0(\mathcal{P}_a)$, le support de $({}^p\mathrm{H}^i(f * \mathbf{Q}_\ell)|_{\mathcal{A}_x})_\kappa$ est contenu dans l'image des sous-schémas fermée $\tilde{\mathcal{A}}_{H,x}$ de $\tilde{\mathcal{A}}$ où H parcourt l'ensemble des sous-groupes endoscopiques non ramifiés de G tel que $\hat{H} = \hat{G}^0_\kappa$. Sous l'hypothèse de δ-régularité codim$(\mathcal{A}_\delta) \geq \delta$, nous démontrons que Supp$(({}^p\mathrm{H}^i(f * \mathbf{Q}_\ell)|_{\mathcal{A}_x})_\kappa)$ constitue exactement de ces $\tilde{\mathcal{A}}_{H,x}$. Par les comptages des points dans les fibres Hitchin et leurs préstabilisations, cela induit que ce théorème de support implique le lemme fondamental pour les algèbres de Lie [25].

La démonstration de ce théorème est longue et technique, mais elle repose sur une observation simple de Goresky et MacPherson qui est la suivante : supposons qu'on a un morphisme $f : X \to S$ propre et plat de dimension relative d de source lisse, et $Z \in \mathrm{Supp}(f)$ est le support d'un faisceau pervers simple présent dans la décomposition de $f_* \mathbf{Q}_\ell$, alors on a codim$(S) \leq d$. Dans le contexte de la fibration de Hitchin, l'inégalité de Goresky et MacPherson pourrait être améliorée de façon significative comme suit : soit $Z \in \mathrm{Supp}(f)$, δ_Z la valeur minimale que l'invariant δ_Z atteint sur Z, alors codim$(Z) \leq \delta_Z$. Avec l'hypothèse de δ-régularité codim$(S_\delta) \geq \delta$, cela implique que si $Z \in \mathrm{Supp}(f)$, alors Z doit être une composante irréductible de S_δ qui est de codimension exactement égale à δ. En utilisant en plus le fait que $\mathcal{P}_a$ agit simplement transitivement sur $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ et que $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ est dense dans $\mathcal{M}_a$, on arrive à la description complète des supports : Supp$(({}^p\mathrm{H}^i(f * \mathbf{Q}_\ell)|_{\tilde{\mathcal{A}}_x})_\kappa)$ constitue exactement de ces $\tilde{\mathcal{A}}_{H,x}$.

En général, ce problème de déterminer Supp$(f_* \mathbf{Q}_\ell)$ a été presque entièrement résolu dans un travail récent de Migliorini et Shende [23]. Pour un morphisme propre $f : X \to S$ tel que X et S sont lisses, Migliorini et Shende ont introduit une nouvelle stratification de S qu'ils appellent les « discriminants supérieurs ». Pour tout $\delta \in \mathbf{N}$, on considère le sous-schéma ouvert U_δ de S des points $s \in S$ tel qu'il existe un sous-espace $V_\delta \subset \mathrm{T}_s S$ de dimension δ tel que pour tout $x \in f^{-1}(s)$, le morphisme composé

$$ T_x X \to T_s S \to T_s S / V_\delta $$

est surjectif. Pour $\delta = 0$, U_0 est l'ouvert maximal de S au-dessus duquel $f : X \to S$ est lisse. On note $S_0 = U_0$ et $S_\delta = V_\delta \backslash V_{\delta-1}$ pour $\delta > 0$. Sur $\mathbf{C}$, Migliorini et Shende ont démontré que si $Z \in \mathrm{Supp}(f)$, alors Z est une composante irréductible de S_δ de codimension δ. Notons que dans le cas de la fibration de Hitchin, les strates de discriminants supérieurs de Migliorini et Shende sont exactement les strates δ-constantes.

INTÉGRATION NON ARCHIMÉDIENNE

Dans un travail récent [12], Groechenig, Wyss et Ziegler ont redémontré le lemme fondamental sans utiliser le théorème de support, mais toujours en s'appuyant sur la géométrie de la fibration de Hitchin. Au lieu du théorème de décomposition dans la théorie des faisceaux pervers, ils font appel à des outils en quelques sortes plus élémentaires, à savoir l'intégration p-adique.

De façon similaire aux variétés différentiables réelles, on peut associer une mesure positive $|\omega|$ à une forme différentielle ω de plus haut degré partout non nulle définie sur une variété F-analytique où F est un corps local non archimédien. D'après Weil, si X est un schéma lisse sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de F ayant une forme différentielle ω de plus haut degré partout non nulle, alors la mesure $|\omega|$ qui $X(\mathcal{O})$ qui s'en déduit ne dépend pas du choix de ω. Il s'ensuit que pour tout $\mathcal{O}$-schéma lisse, il existe une mesure canonique μ_X sur $X(\mathcal{O})$, dite « la mesure de Weil », par recollement des mesures définies sur des ouverts de Zariski où il existe des formes différentielles de plus haut degré partout non nulle. La propriété de base de la mesure de Weil est que, si $\bar{x} \in X(k)$ est un point de X à valeurs dans le corps résiduel k de $\mathcal{O}$, alors le volume de l'ensemble $B_{\bar{x}}$ des points $x \in X(\mathcal{O})$ qui se réduisent à $\bar{x}$ est égal à q^{-d} où $q = |k|$ et d est la dimension relative de $X/\mathcal{O}$.

L'outil technique essentiel de l'intégration est le théorème de Fubini dont voici une variante. Soit $f : X \to S$ un morphisme plat entre des k-schémas lisses. Pour tout $s \in S(\mathcal{O})$, on peut définir une mesure canonique μ_{X_s} pour tout sous-ensemble compact ouvert U de $X(\mathcal{O})$, on a la formule de Fubini

$$\mathrm{vol}(U, \mu_X) = \int_{S(\mathcal{O})} \mathrm{vol}(U \cap X_s(\mathcal{O}), \mu_{X_s}) \mu_S$$

Pour tout k-point $\bar{s} \in S(k)$, considérons l'ensemble $B_{\bar{s}}$ des points $s \in S(\mathcal{O})$ qui se réduisent à $\bar{s}$. On peut alors exprimer le volume $\mathrm{vol}(f^{-1}(B_{\bar{s}}), \mu_X)$ de deux façons. D'une part, la propriété principale de la mesure de Weil, on a

$$\mathrm{vol}(f^{-1}(B_{\bar{s}}), \mu_X) = q^{-\dim(X)} \left| X_{\bar{s}}(k) \right|$$

D'autre part, on a la formule de Fubini

$$\mathrm{vol}(f^{-1}(B_{\bar{s}}), \mu_X) = \int_{B_{\bar{s}}} \mathrm{vol}(X_s(\mathcal{O}), \mu_{X_s}) \mu_S$$

si bien que le nombre de points au-dessus de $\bar{s} \in S(k)$ peut s'exprimer comme une intégrale sur la boule $B_{\bar{s}}$. Cette formule est essentiellement triviale dans le cas où la fibre $X_{\bar{s}}$ est lisse, mais donne une nouvelle expression analytique du nombre des points dans une fibre singulière.

Même s'il y a peu d'espoir de calculer le nombre de points dans une fibre singulière par l'intégrale de Fubini, cette formule peut être puissante pour démontrer l'égalité des nombres de points de deux fibrations. Voici un cas typique. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit

$h_i : M_i \to S$ un morphisme propre muni d'une action d'un schéma en groupes lisse et commutatif $g_i : P_i \to S$ qui agit simplement transitivement sur un ouvert dense $\mathcal{M}_i^{\mathrm{reg}}$ de $\mathcal{M}_i$. Supposons que les $\mathcal{M}_i$ et S sont des k-schémas lisses. Alors on a l'égalité des nombres de points dans la fibre de h_1 et h_2 au-dessus de n'importe quel point $\bar{s} \in S(k)$, du moment que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

1) il existe une isogénie $P_1 \to P_2$ de degré premier à la caractéristique de k,
2) au-desssus d'un ouvert dense S' de S, P_1 et P_2 sont des schémas abéliens duaux.

L'existence de l'isogénie nous permet de relier les mesures relatives $\mu_{M_{i,s}}$ par le biais d'une forme différentielle invariante. La comparaison de l'intégrant s'établit par la théorie des modèles de Néron dont le nombre des composantes connexes de la fibre spéciale est contraint par une dualité due à Grothendieck pour des variétés abéliennes duales.

Il est bien entendu tentant d'appliquer la comparaison à la Fubini aux fibrations de Hitchin pour deux groupes semi-simples duaux au sens de Langlands, car on sait que leurs fibres génériques sont canoniquement duales. Néanmoins, l'application de la comparaison à la Fubini à la fibration de Hitchin n'est pas immédiate car le champ des fibrés de Higgs stables $\mathcal{M}$ ne sont pas des schémas, mais des champs de Deligne-Mumford. La théorie d'intégration essentiellement de nature ensembliste n'est pas adaptée au champs. On peut les appliquer toutefois à l'espace algébrique sous-jacent aux champs de Deligne-Mumford $\mathcal{M}$ dont l'existence est établie par Keel et Mori. Mais l'espace algébrique sous-jacent n'est pas lisse, si bien qu'une nouvelle difficulté apparaît quand on veut relier l'intégrale de Fubini au nombre de points. Groechenig, Wyss et Ziegler ont montré que l'intégrale de Funibi sur M s'exprime en nombre de points sur le champ d'inertie $I\mathcal{M}$ associé à $\mathcal{M}$. Dans le cas des fibrations de Hitchin, le comptage de points sur le champ d'inertie fait intervenir des fibrations de Hitchin des sous-groupes de G appelés « coendoscopiques ». On obtient ainsi de la comparaison à la Fubini une égalité entre des combinaisons linéaires des nombres de points des fibres de Hitchin des groupes coendoscopiques de G et $\hat{G}$. En variant tous les paramètres disponibles dans cette égalité, Groechenig, Wyss et Ziegler obtiennent une nouvelle démonstration du lemme fondamental.

Références

[1] Beauville A. et Laszlo Y., « Un lemme de descente », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, série I : « Mathématique », vol. 320, nº 3, 1995, p. 335-340.

[2] Behrend K. A., « Semi-stability of reductive group schemes over curves », *Mathematische Annalen*, vol. 301, nº 2, 1995, p. 281-305.

[3] Bezrukavnikov R., « The dimension of the fixed point set on affine flag manifolds », *Mathematical Research Letters*, vol. 3, 1996, p. 185-189.

[4] Biswas I. et Ramanan S., « An infinitesimal study of the moduli of Hitchin pairs », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 49, nº 2, 1994, p. 219-231.

[5] Bouthier A. et Cesnavicius K., « Torsors on loop groups and the Hitchin fibration », 2019, https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.07480 [arXiv : 1908.07480v1].

[6] Chaudouard P.-H. et Laumon G., « Le lemme fondamental pondéré I. : constructions géométriques », 2010, p. 1416-1506, https://doi.org/10.48550/arXiv.0902.2684 [arXiv : 0902.2684v1].

[7] Chaudouard P.-H. et Laumon G., « Le lemme fondamental pondéré II. Énoncés cohomologiques », *Annals of Mathematics*, seconde série, vol. 176, nº 3, 2012, p. 1647-1781, https://www.jstor.org/stable/23350640.

[8] Chen T.-H. et Zhu X., « Geometric Langlands in prime characteristic », *Compositio Mathematica*, vol. 153, nº 2, 2017, p. 395-452, https://doi.org/10.1112/S0010437X16008113.

[9] Donagi R.Y. et Gaitsgory D., « The gerbe of Higgs bundles », *Transformation Groups*, vol. 7, nº 2, 2002, p. 109-153, https://doi.org/10.1007/s00031-002-0008-z.

[10] Donagi R.Y. et Pantev T., « Langlands duality for Hitchin systems », *Inventiones Mathematicae*, vol. 189, nº 3, 2012, p. 653-735, https://doi.org/10.1007/s00222-012-0373-8.

[11] Goresky M., Kottwitz R. et MacPherson R.D., « Codimensions of root valuation strata », 2006, https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0601197 [arXiv:math/0601197v1].

[12] Groechenig M., Wyss D. et Ziegler P., « Geometric stabilisation via p-adic integration », *Journal of the American Mathematical* Society, vol. 33, nº 3, 2020, p. 807-873, https://doi.org/10.1090/jams/948.

[13] Heinloth J., « Uniformization of G-bundles », *Mathematische Annalen*, vol. 347, nº 3, 2010, p. 499-528, https://doi.org/10.1007/s00208-009-0443-4.

[14] Hitchin N.J., « Stable bundles and integrable systems », *Duke Mathematical Journal*, vol. 54, nº 1, 1987, p. 91-114.

[15] Hitchin N.J., « The self-duality equations on a Riemann surface », *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol 55, nº 3, 1987, p. 59-126, https://doi.org/10.1112/plms/s3-55.1.59.

[16] Kazhdan D. et Lusztig G., « Fixed point varieties on affine flag manifolds », *Israel Journal of Mathematics*, vol. 62, nº 2, 1988, p. 129-168.

[17] Keel S. et Mori S., « Quotients by Groupoids », *Annals of Mathematics*, vol. 145, nº 1, 1997, p. 193-213, https://doi.org/10.2307/2951828.

[18] Kostant B., « Lie group representations on polynomial rings », *American Journal of Mathematics*, vol. 85, nº 3, 1963, p. 327-404, https://doi.org/10.2307/2373130.

[19] Kottwitz R.E., « Stable trace formula: elliptic singular terms », *Mathematische Annalen*, vol. 275, 1986, p. 365-399.

[20] Lang S., « Algebraic groups over finite fields », *American Journal of Mathematics*, vol. 78, 1956, p. 555-563, https://doi.org/10.2307/2372673.

[21] Langlands R., *Les Débuts d'une formule des traces stable*, Paris, U.E.R. de Mathématiques et L.A. 212 du CNRS, coll. « Publications Mathématiques de l'Université Paris VII », vol. 13, 1983.

[22] Laumon G. et Ngô B.C., « Le lemme fondamental pour les groupes unitaires », *Annals of Mathematics*, seconde série, vol. 168, nº 2, 2008, p. 477-573.

[23] Migliorini L. et Shende V., « Higher discriminants and the topology of algebraic maps », *Algebraic geometry*, vol. 5, nº 1, 2018, p. 114-130.

[24] Ngô B.C., « Fibration de Hitchin et endoscopie », *Inventiones Mathematicae*, vol. 164, nº 2, 2006, p. 399-453, https://doi.org/10.1007/s00222-005-0483-7.

[25] Ngô B.C., « Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie », *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, vol. 111, nº 1, 2010, p. 1-169, https://doi.org/10.1007/s10240-010-0026-7.

[26] Ngô B.C., « Decomposition theorem and abelian fibration », *in* L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse et B.C. Ngo (dir.), *On the stabilization of the trace formula*, Somerville, International Press, 2011, p. 253-264.

[27] Pappas G. et Rapoport M., « Twisted loop groups and their affine flag varieties », *Advances in Mathematics*, vol. 219, n° 1, 2008, p. 118-198, https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.04.006.

[28] Serre J.-P., *Cohomologie galoisienne*, Berlin, Springer-Verlag, coll. « Lecture Notes in Mathematics », vol. 5, 1964.

[29] Springer T.A., « Reductive groups », *Automorphic forms, representations and L-functions*, Providence, coll. « Proceedings of Symposia in Pure Mathematics », vol. 33, n° 1, 1979, p. 3-27.

[30] Steinberg R., « Regular elements of semisimple algebraic groups », *Publications Mathématiques. Institut de hautes études scientifiques*, vol. 25, 1965, p. 49-80, https://doi.org/10.1007/BF02684397.

[31] Zhu Xinwen, « An introduction to affine Grassmannians and the geometric Satake equivalence », 2016, https://arxiv.org/abs/1603.05593.