Annuaire du Collège de France

121e année

2020
2021

Résumé des cours et travaux

COLLÈGE
DE FRANCE
1530

Annuaire du Collège de France
Cours et travaux du Collège de France

121 | 2024
2020-2021

Équations aux dérivées partielles et applications

Pierre-Louis Lions

Édition électronique
URL : https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/19173
DOI : 10.4000/12ktj
ISBN : 978-2-7226-0778-1
ISSN : 2109-9227

Éditeur
Collège de France

Édition imprimée
Date de publication : 18 novembre 2024
Pagination : 31-36
ISBN : 978-2-7226-0777-4
ISSN : 0069-5580

Référence électronique
Pierre-Louis Lions, « Équations aux dérivées partielles et applications », *L'annuaire du Collège de France* [En ligne], 121 | 2024, mis en ligne le 01 octobre 2024, consulté le 28 novembre 2024. URL : http://journals.openedition.org/annuaire-cdf/19173 ; DOI : https://doi.org/10.4000/12ktj

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS

Pierre-Louis Lions

Membre de l'Institut (Académie des sciences)
et de l'Académie des technologies,
professeur au Collège de France

La série de cours « Premières valeurs et fonctions propres » est disponible en audio et en vidéo sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/premieres-valeurs-et-fonctions-propres).

ENSEIGNEMENT

COURS – PREMIÈRES VALEURS ET FONCTIONS PROPRES

Le cours a eu lieu du 6 novembre 2020 au 22 janvier 2021.

Introduction

Le cours de cette année a porté sur la première valeur propre et la première fonction propre d'opérateurs elliptiques du second ordre, éventuellement dégénérés ou intégro-différentiels. Ce sujet classique trouve notamment son origine dans le célèbre théorème de Krein-Rutman et a connu d'innombrables développements. Malgré cela, de nombreuses situations ne pouvaient être étudiées avec les outils existant à cause, par exemple, du manque de compacité pour des problèmes posés dans l'espace entier. Or les nombreuses applications de cette thématique classique (modèles mathématiques en physique, mécanique, biologie, économie…) exigent souvent de traiter des opérateurs définis sur l'espace entier.

P.-L. Lions, « Équations aux dérivées partielles et applications », *Annuaire du Collège de France 2020-2021. Résumé des cours et travaux*, 121e année, Paris, Collège de France, 2024, p. 31-36, https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.19173.

L'objet du cours était donc de combler ce vide en proposant une approche générale et flexible couvrant aussi bien les situations « classiques » en toute généralité et les problèmes ouverts jusqu'alors.

Approche abstraite (1)

On considère un espace de Banach X dont la norme est notée $|x|$ pour $x \in X$. On suppose qu'il existe un cône convexe fermé K de sommet 0 dans X. Et on note $x \geq 0$ si $x \in K$, $x > 0$ si $x \in K_0$ (intérieur de K), $x \geq y$ (resp. $x \leq y$) si $x - y \in K$ (resp. $y - x \in K$). On vérifie aisément que si K_0 est non vide, alors

$$y \in K, x \in K_0, y \geq x \Rightarrow y \in K_0 \tag{1}$$

$$x \in K - \{0\}, y \in K_0 \Rightarrow \exists\, C \geq 0, x \leq Cy \tag{2}$$

On considère une application T de K dans K supposée continue, positivement homogène et préservant « l'ordre » *i.e.*

$$K \in x \leq y \Rightarrow Tx \leq Ty \tag{3}$$

L'objectif de ce qui suit est de donner des conditions sur T pour qu'il existe une unique constante $\mu_1 > 0$ telle qu'il existe $\eta_1 \in K - \{0\}$ vérifiant

$$\eta_1 = \mu_1 T \eta_1 \tag{4}$$

et que, de plus, η_1 soit unique à une constante multiplicative près.

La première situation abordée dans le cours est le cas où $K_0 \neq \phi$ et où on suppose que T envoie $K - \{0\}$ dans K_0. On introduit

$$\mu_1 = \sup(\mu > \ 0 / \exists\, y \in K - \{0\}, y \geq \mu T y + T\overline{x}) \tag{5}$$

où $\overline{x}$ est fixé dans $K - \{0\}$. Nous faisons l'hypothèse que T est compact ou que T vérifie la propriété suivante pour $\mu \in]0, \mu_1[$

$$\text{si } x_n \uparrow_n, x_{n+1} = \mu T x_n + T\overline{x}, x_n \leq y, \text{ alors } x_n \text{ converge} \tag{6}$$

On démontre alors que

i) $\forall \mu \in]0, \mu_1[, \exists! x_\mu$ solution de $x_\mu = \mu T x_\mu + T\overline{x}$

ii) $\mu_1 < \infty$ et μ_1 est indépendant du choix de $\overline{x}$

iii) $\mu_1 = \inf(\mu \geq 0 / \exists\, z \in K - \{0\}, z \leq \mu T z)$

iv) l'équation $x = \mu_1 T x + T\overline{x}$ n'a pas de solution.

On note alors $C_\mu > 0$ la plus petite constante C telle que $x_\mu \leq \mathrm{C}\, T\overline{x}$. Et on vérifie que $C_\mu \to +\infty$ si $\mu \to \lambda_1$. On pose alors $\zeta_\mu = \frac{x_\mu}{C_\mu}$ de sorte que $\zeta_\mu \leq T\overline{x}$, $\zeta_\mu = \mu T \zeta_\mu + \frac{1}{C_\propto} T\overline{w}$ et $\frac{1}{C_\propto} T\overline{x} \to 0$ si $\mu \to \lambda_1$. Alors, en supposant que T vérifie la propriété suivante

$$\begin{cases} \text{si } \zeta_\mu \in K - \{0\}, \zeta_\mu = \mu T \zeta_\mu + \varepsilon_\mu,\ \varepsilon_\mu \to 0 \text{ si } \mu \to \lambda_1 \zeta_\mu \leq y \in K_0 \\ \text{alors la famille } (\zeta_\mu)_\mu \text{ est relativement compacte} \end{cases} \tag{7}$$

on démontre que

i) $\zeta_\mu \to \eta_1$ si $\mu \to \lambda_1$, $\eta_1 \in K_0$, $\eta_1 = \mu_1 T \eta_1$

ii) μ_1 est l'unique $\mu > 0$ tel qu'il existe $\eta \in K - \{0\}$, $\eta = \mu T \eta$

iii) si $\eta \in K - \{0\}$, $\eta = \mu_1 T \eta$ alors $\eta = C \eta_1$ pour une constante $C > 0$.

On peut également obtenir ces conclusions en supposant que T est compacte à la place de la condition (7).

La deuxième situation abordée dans le cours est celle où l'on ne suppose plus que $K_0 \neq \phi$ (ni que T est compacte). On suppose alors qu'il existe $y \in K - \{0\}$ tel que $Ty \geq vy$ pour une constante positive $v > 0$. En travaillant comme précédemment dans le cône $K_1\{x \in K / \exists\, C \geq 0, x \leq Cy\}$, on obtient l'existence d'une solution de (4) sous les mêmes hypothèses (6) et (7) (adaptées à K_1). En revanche, l'unicité n'est pas établie sans hypothèse supplémentaire.

Remarques :

i) Nous avons étudié dans le cours, dans le cas particulier où T est linéaire, l'existence et l'unicité d'un « premier vecteur propre » et d'une « première valeur propre » pour l'opérateur dual T sur le cône dual $K* = \{\varphi \in X^* / \langle \varphi, x \rangle \geq 0\ \forall\, x \in K\}$.

ii) Cette approche abstraite illustre le fait que l'on peut déterminer, en général, une valeur potentielle pour μ_1 et que l'existence découle de l'étude des « presque premiers vecteurs propres » [voir (7)].

iii) À titre d'illustration, nous avons démontré dans le cours l'existence et l'unicité (à une constante multiplicative positive près) de : $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$ dans Ω,$\varphi_1 \in H_0^2(\Omega)$, $\varphi_1 > 0$ p.p. dans Ω où Ω est un ouvert borné régulière de $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$, et l'opérateur H est donné par

$$A = -\,\partial_i a_{ij} \partial_j - b_i \partial_i + \partial_i(\beta_{i\cdot}) + c \tag{8}$$

avec a_{ij}, b_i, β_i, $c \in L^\infty(\Omega)$, $(a_{ij}) \geq \delta Id$ p.p. sur $\Omega (\delta > 0)$. Alors $\lambda_1 >$ infess c, $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$. Le même résultat a été obtenu pour

$$A = -\, a_{ij} \partial_{ij} - b_i \partial_i + c \tag{9}$$

avec $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty$, $(a_{ij}) \geq \delta Id$ sur $\overline{\Omega} (\delta > 0)$.

On cherche alors φ_1 dans $C(\overline{\Omega})$ et les résultats de régularité elliptique assurent bien sûr que $\varphi_1 \in W^{2,p}(\Omega) (\forall p < \infty)$. Il est à noter que ce cas peut s'obtenir, dans ce cas, directement à partir du théorème de Krein-Rutman contrairement à la situation précédente.

Opérateurs dans l'espace entier (2)

Après avoir rappelé quelques résultats et méthodes connues, à savoir l'approche variationnelle dans le cas où l'opérateur est auto-adjoint, des approximations (notamment par troncature de l'espace), ou l'ergodicité et les mesures invariantes, nous avons présenté et demandé dans le cours une série complète de résultats montrant comment tous les résultats connus peuvent être unifiés et généralisés. Ainsi, par exemple, pour l'opérateur (8) et les équations (où $1 < p < \infty$ est fixé)

$$A\varphi_1 = \lambda_1\, \varphi_1 \text{ dans } \mathbb{R}^d,\ \varphi_1 > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d,\ \varphi_1 \in L^p \cap C_0 \tag{10}$$

et

$$A^*\psi_1 = \lambda_1\psi_1 \text{ dans } \mathbb{R}^d,\ \psi_1 > 0 \text{ dans dans } \mathbb{R}^d,\ \psi_1 \in L^{p'} \cap C_0 \tag{11}$$

où $A^* = -\, \partial_i(a_{ji}\partial_j) + \partial_i(b_i\cdot) - \beta_i\partial_i,\ p' = p/(p^{-0})$.

Il est à noter que le cas $p = 1, p' = +\,\infty$ a aussi été considéré dans le cours. Comme expliqué précédemment, il suffit de considérer des « presque fonctions propres » φ^n vérifiant : $\|\varphi^n\|[=1$,

$$A\varphi^n = \lambda^n\varphi^n + \varepsilon_n \text{ dans } \mathbb{R}^d,\ \varphi^n > 0 \tag{12}$$

avec $\varepsilon_n \underset{n}{\rightarrow} 0$ dans L^p. Alors, l'existence de $(\varphi_1,\ \psi_1)$ découle d'une analyse aisée obtenue en observant que, par contradiction, l'on peut supposer que φ_n converge faiblement dans L^p vers 0 et donc fortement dans L^p_{Loc} (grâce à l'ellipticité de A). On multiplie 10) par $(\varphi^n)^{p-1}$ et on obtient facilement la contradiction désirée en supposant, par exemple, que

$$\lambda_1 < \lim_{|x|\to\infty} \operatorname{infess}\{c + \frac{1}{p}\operatorname{div}\gamma^1 - \frac{1}{p-1}C_0^2\,|\gamma^2|^2\} \tag{13}$$

où $\gamma^1 + \gamma^2 = \gamma = b - (p-1)\beta, C_0(x) = \max\limits_{|\varepsilon|=1}(a_{ij}(x)\varepsilon_i\varepsilon_j)^{-1/2}$

Sous cette hypothèse (mais ce n'est pas la seule…), l'existence de $(\varphi_1,\ \psi_1)$ solution de (9)-(10) est alors assurée. L'unicité à une constante multiplicative près de φ_1 (et de Ψ_1) s'obtient alors grâce à une méthode introduite par L. Tartar (reposant sur la convexité de l'équation obtenue par la transformation de Cole-Hopf $u = \log\varphi$) en introduisant $\varphi = (\varphi^1\varphi^2)^{½}$ où φ^1, φ^2 sont deux solutions.

Remarque :

Nous avons également appliqué dans le cours notre approche à des opérateurs intégro-différentiels comme, par exemple, l'opérateur dans $\mathbb{R}$.

$$A = -\frac{dw}{dx} + \lambda^2 u + a(u - u * k)$$

où $a > 0$, k est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ (on peut en fait étudier de la même manière des opérateurs plus généraux que $k * u$…). On suppose sans restreindre la généralité que $0 \in \mathrm{Supp}\, k = \sum$. Alors, l'existence et l'unicité de $(\lambda_1, \varphi_1, \psi_1)$ (avec $\varphi_1, \Psi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2 ...$) s'obtient de manière analogue à ce que nous avons indiqué plus haut, la stricte positivité et l'unicité nécessitant que $\overline{\underset{N}{U} \Sigma_N} = \mathbb{R}$ où $\Sigma_N = \Sigma + ... + \Sigma$ (N fois).

SÉMINAIRE

Le séminaire « Mathématiques appliquées » n'a pas eu lieu.

RECHERCHE

MISSIONS, INVITATIONS, CONFÉRENCES

- Exposé « Maths et développement durable », ACD (Collège de France), le 21 septembre 2020 ;
- Exposé au colloque inaugural de l'institut NSF à Chicago, USA (visioconférence), le 7 octobre 2020 ;
- Conférence pour le « 20e anniversaire du CMM » à Santiago, Chili (visioconférence), le 4 novembre 2020 ;
- Exposé « Finance verte », fondation du Collège de France, le 14 décembre 2020 ;
- Table-ronde sur « Régulations et FDD » (visioconférence), le 31 mars 2021 ;
- Exposé « Animaths » (visioconférence), le 28 mai 2021.

PUBLICATIONS

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Extended mean-field games », *Rendiconti Lincei – Matematica e Applicazioni*, vol. 31, nº 3, 2020, p. 611-625, https://doi.org/10.4171/RLM/907.

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Effective transmission conditions for second-order elliptic equations on networks in the limit of thin domains », *Comptes rendus. Mathématique*, t. 358, nº 7, 2020, p. 797-809, https://doi.org/10.5802/crmath.83.

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « The asymptotics of stochastically perturbed reaction-diffusion equations and front propagation », *Comptes rendus. Mathématique*, t. 358, nº 8, 2020, p. 931-938, https://doi.org/10.5802/crmath.117.

Lions P.-L., Bertucci C., Bertucci L. et Lasry J.-M., « Mean field game approach to Bitcoin mining », 2020, http://arxiv.org/abs/2004.08167.

Lions P.-L., Achdou Y., Bertucci C., Lasry J.-M., Rostand A. et Scheinkman J., « A class of short-term models for the oil industry addressing speculative storage », 2020, https://arxiv.org/abs/2003.11790.

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Homogenization of the backward-forward mean-field games systems in periodic environments », *Rendiconti Lincei – Matematica e Applicazioni*, vol. 31, nº 4, 2021, p. 733-755, https://doi.org/10.4171/RLM/912 [arXiv :1909.01250v2].

Lions P.-L., « HJB, MFG et les autres (suite) », *Annuaire du Collège de France 2019-2020. Résumé des cours et travaux*, 120e année, 2023, p. 23-26, https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.18070.

Lions P.-L., Carmona R. et Laurière M., « Non-standard stochastic control with nonlinear Feynman-Kac costs », preprint, 2020.

Lions P.-L., Bertucci C., Bertucci L. et Lasry J.-M., « How resilient is the Bitcoin protocol? », *Université Paris-Dauphine Research Paper*, 2021, nº 3907822, https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3907822.

Lions P.-L., Lasry J.-M. et Seeger B., « Dimension reduction techniques in deterministic mean field games », 2021, https://arxiv.org/abs/2105.02718.

Lions P.-L., Bertucci C., Debbah M. et Lasry J.-M., « A spectral dominance approach to large random matrices », 2021, https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.08983 [arXiv : 2105.08983v1].