

Physique quantique - 28 Février 2011

Cours 2010-2011: Septième Leçon

Préparation et protection d'états d'un oscillateur harmonique par rétroaction quantique

Nous décrivons une expérience visant à préparer et protéger de la décohérence un état non-classique d'un oscillateur harmonique, en utilisant une méthode de rétroaction quantique (*quantum feedback*). L'expérience, proposée dans un travail réalisé en collaboration entre le groupe d'électrodynamique quantique en cavité de l'ENS et l'équipe de Pierre Rouchon à l'Ecole des Mines, consiste à préparer et protéger des états de Fock « cibles » déterminés dans une cavité C .

La procédure implique des boucles d'opérations contrôlées par ordinateur. A chaque pas, un atome de Rydberg effectue une mesure POVM non destructive (QND) du champ et l'ordinateur détermine l'état du champ conditionné au résultat de la mesure, ainsi que le recouvrement entre cet état et l'état cible. En fonction de cette information, l'ordinateur calcule l'amplitude du champ à ajouter dans C pour maximiser ce recouvrement et commande l'injection de ce champ. Après quelques dizaines d'itérations, le champ doit converger vers l'état cible. Une fois cet état atteint, la poursuite de la procédure doit permettre de détecter les sauts quantiques du champ et corriger leurs effets, protégeant ainsi l'état de Fock contre la décohérence. Nous commençons (SVII-A) par rappeler comment s'effectue la mesure QND du nombre de photons, puis nous analysons (&VII-B) la procédure de cet asservissement quantique et en présentons des simulations numériques.

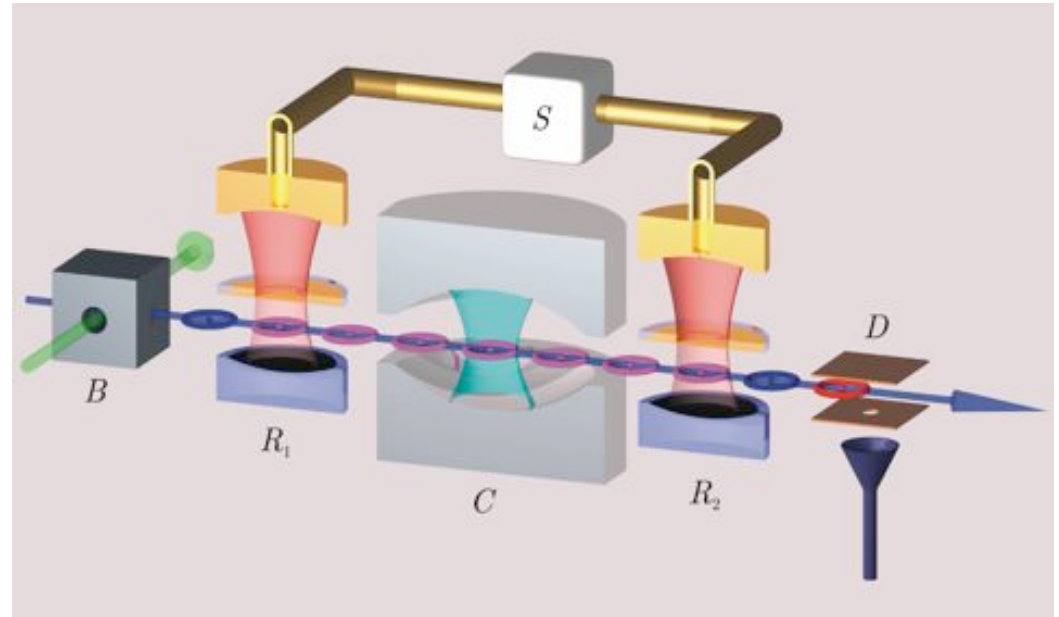
VII-A

Rappels sur la mesure non-destructive du nombre de photons dans une cavité

Voir cours 2007-2008, leçons 5 et 6

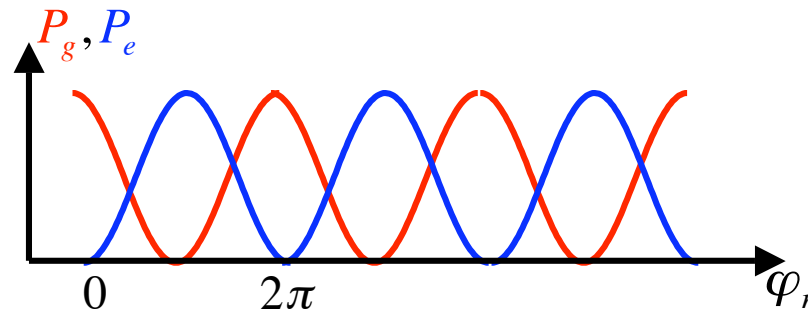
Rappels sur la mesure QND du nombre de photons par la méthode de Ramsey

Considérons un interféromètre de Ramsey avec deux cavités R_1 et R_2 encadrant la cavité C qui contient le champ à mesurer. L'atome à deux niveaux g et e (qubit dans l'état $j=0$ et $j=1$ respectivement), préparé dans e , subit des pulses classiques $\pi/2$ dans R_1 et R_2 , le second ayant un déphasage φ_r par rapport au premier. Les probabilités de détecter l'atome dans g ($j=0$) et e ($j=1$) lorsque la cavité est vide sont:



$$P_j = \cos^2 \frac{(\varphi_r - j\pi)}{2} \quad ; \quad j = 0, 1 \quad (7-1)$$

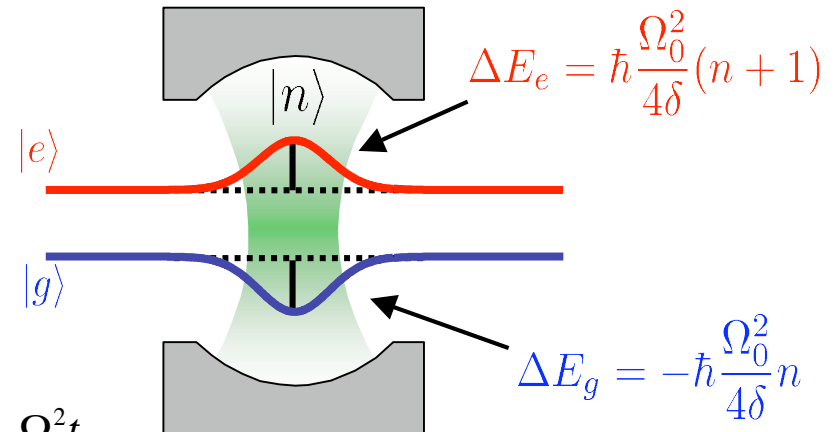
Les probabilités P_j oscillent en opposition de phase lorsque φ_r est balayé: ce sont les franges de Ramsey.



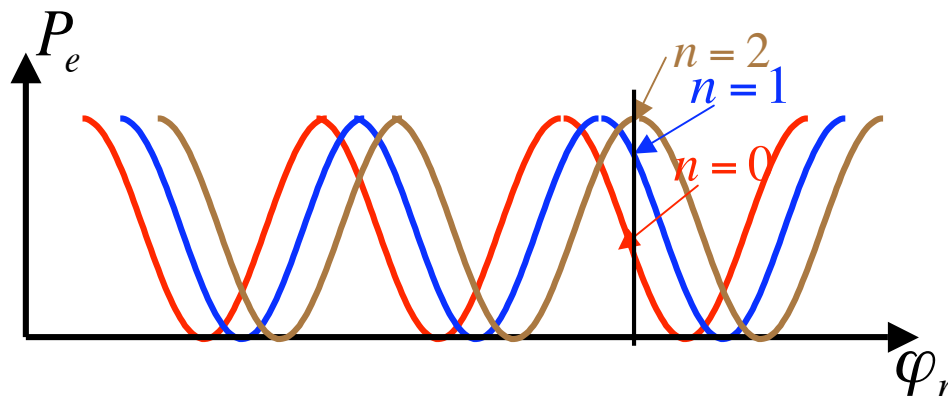
Rappels sur la mesure QND du nombre de photons par la méthode de Ramsey (suite)

Si la cavité est non-résonante avec la transition atomique (désaccord δ) et contient n photons, le dipôle atomique subit en traversant C un déphasage $\Phi(n)$, fonction de n , linéaire en n à l'ordre le plus bas. Les franges sont décalées en phase et les probabilités P_j deviennent:

$$P_j(n) = \cos^2 \frac{(\varphi_r + \Phi(n) - j\pi)}{2} \quad ; \quad \Phi(n) = \phi_0 n + O(n^2) \quad ; \quad \phi_0 = \frac{\Omega_0^2 t_{\text{eff}}}{2\delta} \quad (7-2)$$

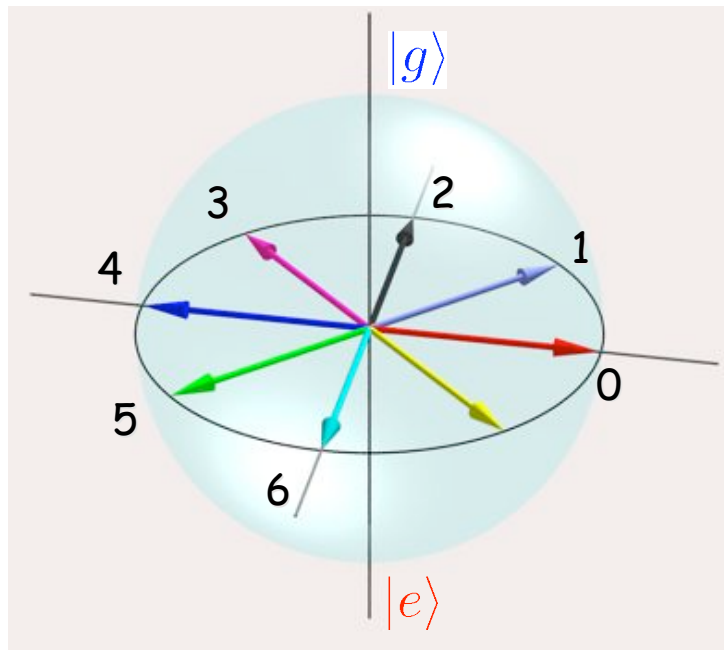


On a introduit le déphasage par photon ϕ_0 , proportionnel à t_{eff} , durée effective de la traversée de la cavité, tenant compte de la variation spatiale du couplage. Le décalage des franges permet de mesurer le nombre de photons de façon non-destructive (méthode QND).

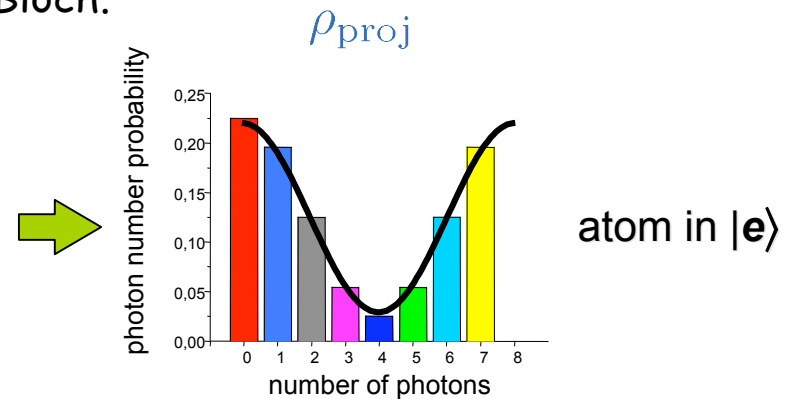


Pour un choix de phase φ_r , la probabilité de trouver l'atome dans e (ou g) prend des valeurs différentes selon n

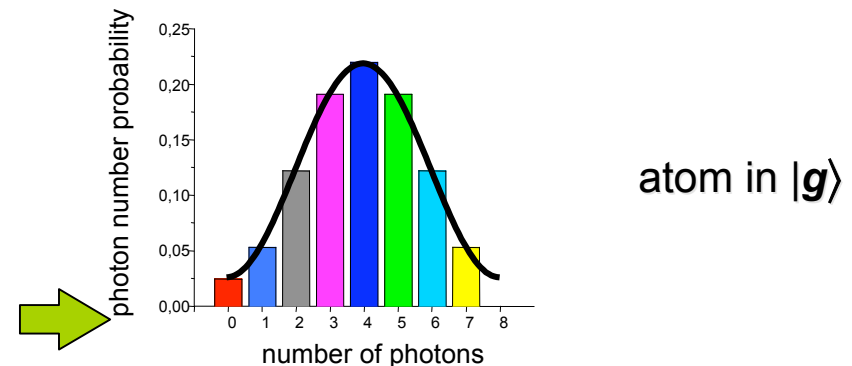
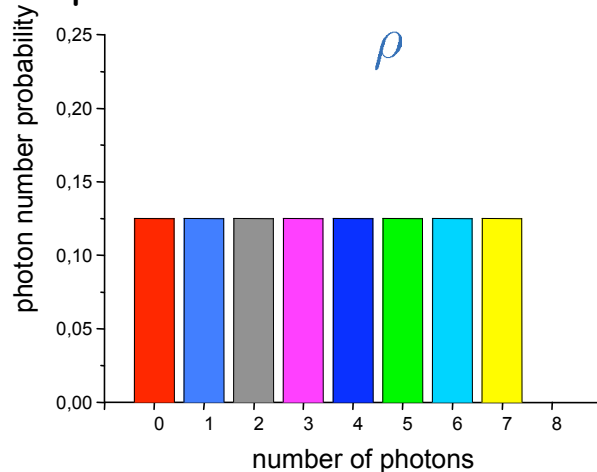
Information donnée par détection d'un atome



Détecter le signal de Ramsey avec une phase φ_r revient à choisir une direction de détection du vecteur associé au qubit dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. On ajuste φ_0 pour distinguer les nombres de photons de 0 à 7, chacun correspondant à une direction différente du vecteur de Bloch.



A priori aucune information sur n



La mesure de l'atome projette l'opérateur densité en modulant la probabilité $\Pi(n)$ par un terme sinusoïdal dont la phase est celle des franges de Ramsey (loi de Bayes).

La mesure d'un seul atome réalise un POVM

Introduisons les deux opérateurs du champ, hermitiques et positifs:

$$E_j = \cos^2 \frac{(\varphi_r + \Phi(a^\dagger a) - j\pi)}{2} \quad (7-3)$$

qui satisfont la relation de complétude:

$$\sum_j E_j = E_0 + E_1 = I \quad (7-4)$$

Les E_j forment un POVM à 2 éléments réalisé en détectant l'atome. Si le champ à mesurer est décrit par l'opérateur densité ρ , la probabilité de trouver le résultat j est en effet:

$$P_j(\rho) = \sum_n \rho_{nn} P_j(n) = \sum_n \rho_{nn} \cos^2 \frac{(\varphi_r + \Phi(n) - j\pi)}{2} = \text{Tr} \{ \rho E_j \} \quad (7-5)$$

et après détection de l'atome, le champ est projeté dans l'état:

$$\rho_{proj}(j) = \sum_{n,n'} \frac{\cos \left[\frac{\varphi_r + \Phi(n) - j\pi}{2} \right] |n\rangle \rho_{n,n'} \langle n'| \cos \left[\frac{\varphi_r + \Phi(n') - j\pi}{2} \right]}{P_j(\rho)} = \frac{\sqrt{E_j} \rho \sqrt{E_j}}{\text{Tr} \{ \rho E_j \}} \quad (7-6)$$

Les Eqs (7-5) et (7-6) définissent un POVM (voir cours 2009-2010, leçon 1). Ce POVM est une mesure « partielle » du nombre de photons N . Si on effectue une séquence de POVM identiques avec une suite d'atomes, on acquiert de plus en plus d'information et on réalise finalement une mesure projective de N . Cette mesure est non-destructive (QND).

La mesure QND POVM: formules essentielles

État avant mesure

$$\rho_{proj} = \frac{\sqrt{E_j} \rho \sqrt{E_j}}{\text{Tr}(\rho E_j)}$$

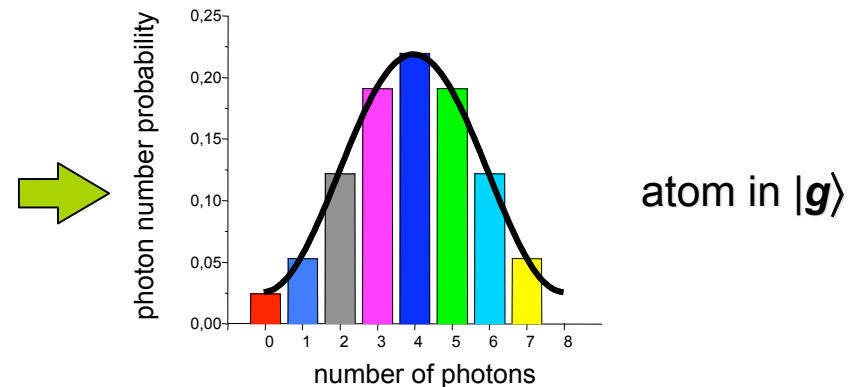
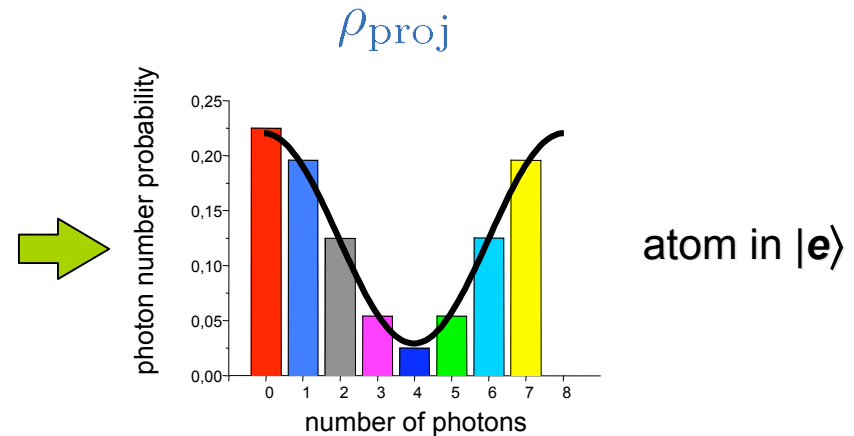
État projeté

$$E_e = \sin^2\left(\frac{\phi_r + \Phi(N)}{2}\right)$$

Les 2 éléments du POVM correspondent aux 2 résultats possibles (e ou g)

$$E_g = \cos^2\left(\frac{\phi_r + \Phi(N)}{2}\right)$$

Si on effectue une série de mesures, chacune donne un nouvel état. La série converge vers un nombre de photons bien défini: projection progressive conduisant à une mesure complète.



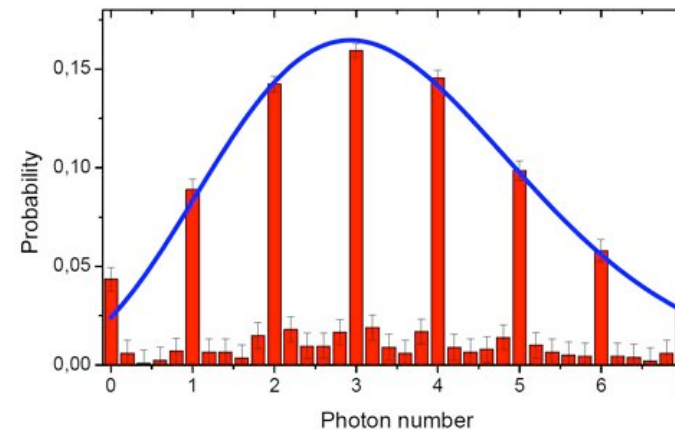
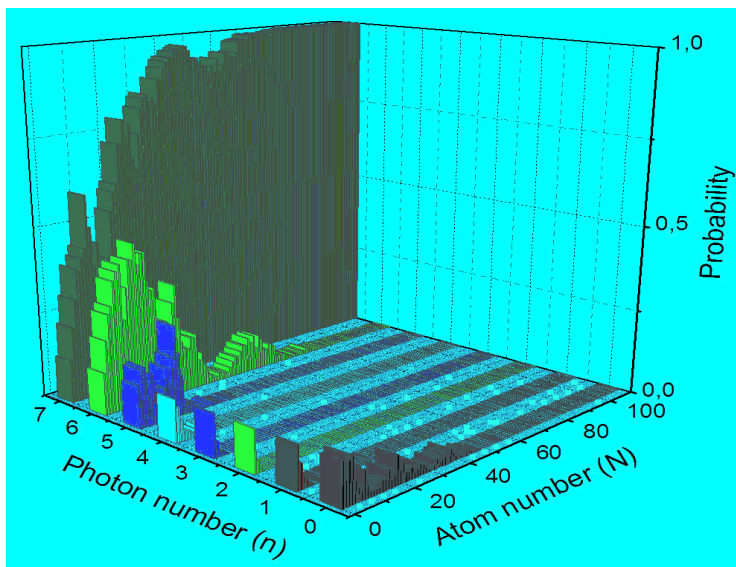
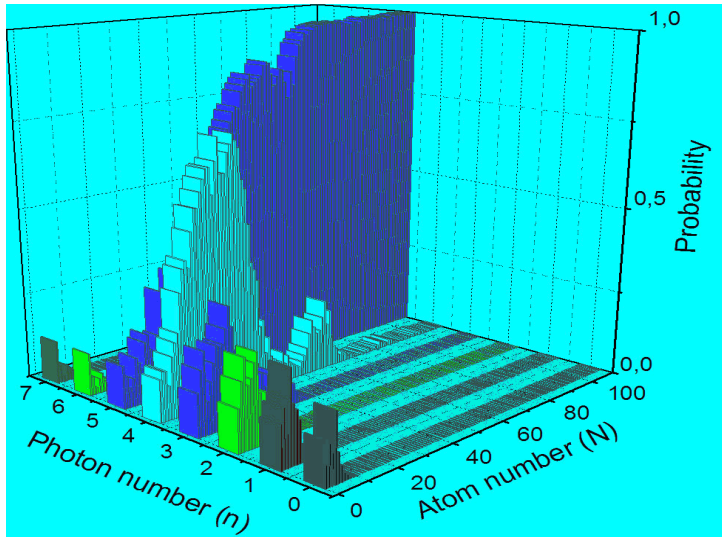
La détection de l'atome change la distribution du nombre de photons (de façon plus générale, l'opérateur densité du champ)

De la mesure POVM à la mesure projective

complète

Ci-contre: évolution de la distribution inférée du nombre de photons dans deux séquences de ~ 100 mesures POVM sur un état cohérent contenant en moyenne 3,7 photons. La première mesure converge vers $n=5$ et la seconde vers $n=7$ (les POVM successifs correspondent à quatre choix de phases ϕ_r alternées).

Ci-dessous: l'histogramme des résultats des mesures donne la distribution du nombre de photons dans l'état cohérent initial: on trouve bien une loi de Poisson.



La mesure QND prépare un état de Fock de façon stochastique. Peut-on modifier le processus pour diriger le résultat vers une valeur fixée a priori?

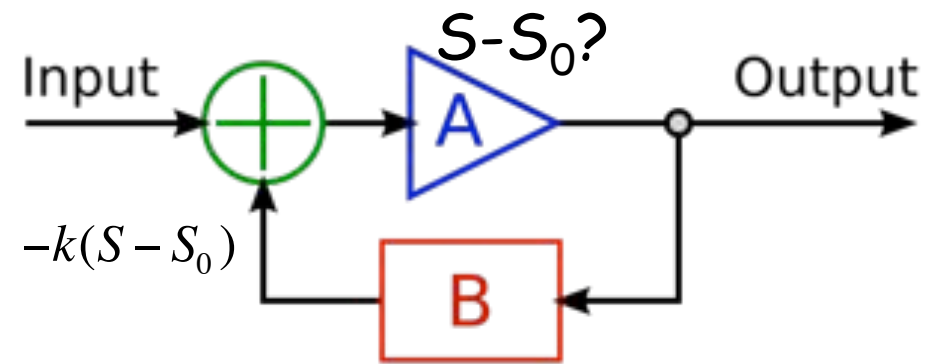
VII-B:

Préparation déterministe et protection d'états de Fock par rétroaction quantique

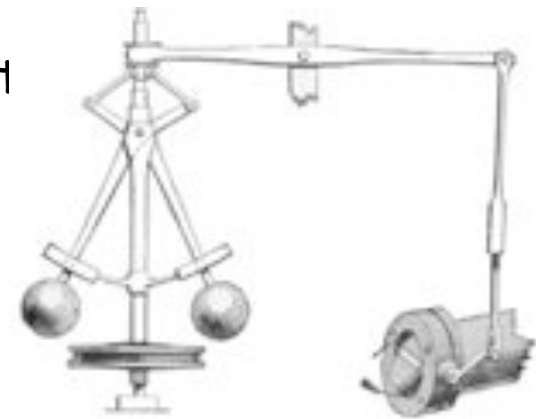
Une collaboration entre le groupe d'Electrodynamique en Cavité ENS-
Collège de France et le groupe de P.Rouchon, Centre Automatique et
Systèmes, Ecole des Mines-ParisTech

Principe de la rétroaction classique

Une mesure sur le système est effectuée (A) et le résultat S comparé à une valeur de consigne S_0 . Un signal de rétroaction $-k(S - S_0)$ (où $-k$ est le gain négatif de la boucle) est réinjecté dans le système (B) pour le rapprocher de son point de fonctionnement idéal. Le dispositif fonctionne en boucle d'asservissement fermée.

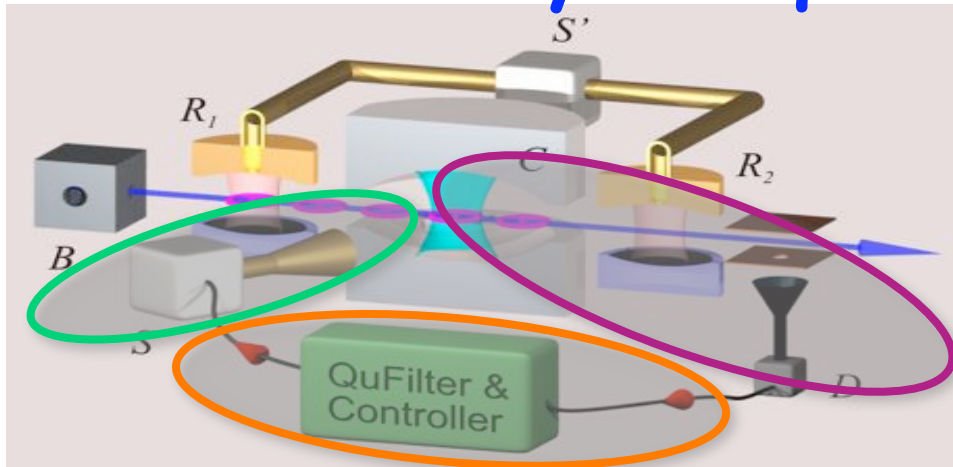


La rétroaction peut être basée sur un effet physique automatiquement modérateur avec un dispositif intégrant l'appareil de mesure et le mécanisme de réponse: un exemple en est le régulateur à boules de la machine à vapeur. Dans d'autres cas, la rétroaction implique deux dispositifs séparés: un appareil de lecture du signal d'erreur et un mécanisme «actuateur» de la réponse, le lien entre les deux étant assuré par un ordinateur (exemple: régulateur de vitesse sur une automobile).



L'adaptation de ces idées à un système quantique doit intégrer un élément essentiel: la mesure rétroagit par elle-même, avant toute autre rétroaction ajoutée, sur l'état du système et il faut en tenir compte pour établir l'algorithme d'asservissement.

Le principe de la rétroaction quantique en Electrodynamique quantique en cavité



Composants de la boucle de rétroaction:

- **Senseur** (quantique):
atomes et mesures QND
- **Contrôleur** (classique):
ordinateur
- **Actuateur** (classique):
injection de micro-onde

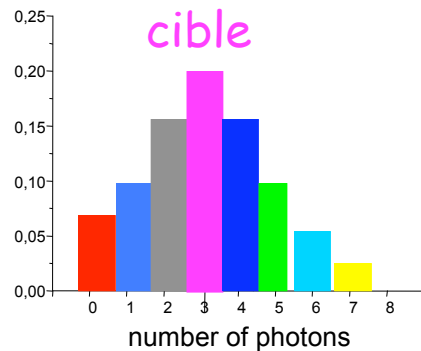
Protocole de rétroaction:

- Injecter un champ cohérent initial dans C
- Envoyer des atomes un à un dans un interféromètre de Ramsey
- Détecter chaque atome qui projette l'opérateur densité ρ du champ de C dans un nouvel état
- Calculer le déplacement α qui maximise le recouvrement F entre l'état cible et l'état déplacé après projection
- fermer la boucle de rétroaction en injectant un champ cohérent d'amplitude α dans C
- Répéter le cycle jusqu'à obtenir $F \sim 1$.

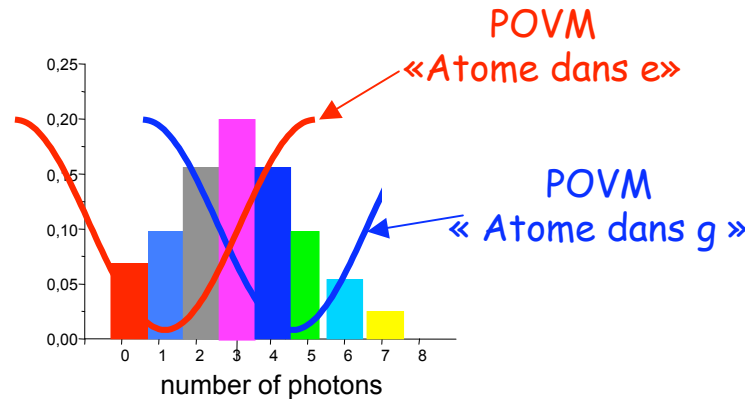
Dans une situation idéale que nous allons d'abord décrire, le champ reste dans un état pur dépendant des résultats aléatoires des mesures: **fonction d'onde stochastique de type «Monte Carlo»**. De façon plus réaliste, l'état doit être décrit par un opérateur densité tenant compte des incertitudes statistiques classiques (bruit, atomes non détectés etc...)

La mesure change l'état du champ et indique la correction à appliquer

La cible est $|n=3\rangle$ et l'état initial l'état cohérent $|\alpha=\sqrt{3}\rangle$. On ajuste l'interféromètre à mi-hauteur de frange pour $n=3$, d'où sensibilité maximale pour distinguer n de $n\pm 1$ autour de $n=3$.

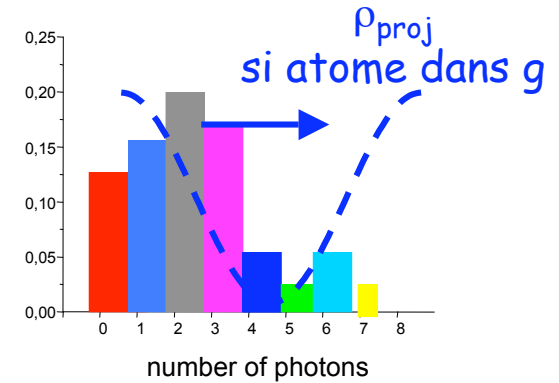


État cohérent initial

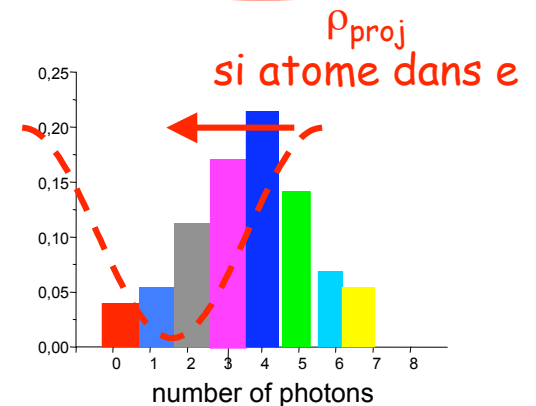


Franges associées aux 2 éléments du POVM

On choisit un déphasage $\pi/4$ par photon, ce qui permet de distinguer les 7 valeurs de n essentiellement présentes dans l'état initial. Suivant que l'atome est détecté dans e ou g , la probabilité du nombre de photons est multipliée par la fonction sinusoïdale rouge ou bleue.



Les flèches indiquent le sens du déplacement correcteur



L'état ρ_{proj} a un nombre moyen de photons décalé vers $n < 3$ si l'atome est détecté dans g , vers $n > 3$ s'il l'est dans e . Pour augmenter la probabilité d'avoir 3 photons, il faut alors appliquer un déplacement avec $\alpha > 0$ dans le premier cas, $\alpha < 0$ dans le second. Nous calculons dans la suite la valeur optimale de α qui maximise le recouvrement de l'état déplacé avec la cible.

Calcul du déplacement de l'état

Considérons le déplacement d'une quantité α d'un état du champ décrit par l'opérateur densité ρ que l'on écrira formellement comme:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{D}(\alpha)\rho \quad (7-7)$$

en définissant le super-opérateur $\mathcal{D}(\alpha)$ par son action sur ρ comme:

$$\mathcal{D}(\alpha)\rho = e^{\alpha(a^\dagger - a)}\rho e^{-\alpha(a^\dagger - a)} \quad (7-8)$$

On envisage ici des déplacements ayant tous la même phase et on choisit α réel sans perte de généralité. En principe, l'equ.(7-8) permet de calculer exactement $\mathcal{D}(\alpha)\rho$ et la valeur de α maximisant $F[(\mathcal{D}(\alpha)\rho)]$. Remplaçons ce calcul, trop long pour l'ordinateur de contrôle d'une expérience réelle, par un calcul au 2^{ème} ordre en α :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha)\rho &= \left[1 + \alpha(a^\dagger - a) + \frac{\alpha^2}{2}(a^\dagger - a)^2 + \dots \right] \rho \left[1 - \alpha(a^\dagger - a) + \frac{\alpha^2}{2}(a^\dagger - a)^2 + \dots \right] \\ &= \rho - \alpha[\rho, a^\dagger - a] + \frac{\alpha^2}{2}[[\rho, a^\dagger - a], a^\dagger - a] + O(\alpha^3) \quad (7-9) \end{aligned}$$

Au premier ordre en α , la fidélité de l'état après déplacement s'écrit:

$$F[\mathcal{D}(\alpha)\rho] = \rho_{n_c n_c} - \alpha \langle n_c | [\rho, a^\dagger - a] | n_c \rangle \quad (7-10)$$

ce qui indique qu'on augmente la fidélité de l'état du champ en appliquant un déplacement de signe opposé à $\langle n_c | [\rho, a^\dagger - a] | n_c \rangle$. On écrira:

$$\alpha = -c_1 \langle n_c | [\rho, a^\dagger - a] | n_c \rangle \quad (7-11)$$

où $-c_1$ est un paramètre négatif de gain qui reste à déterminer.

Calcul du déplacement de l'état (suite)

En explicitant le calcul dans le cas idéal où l'état reste pur, on obtient le déplacement:

$$\begin{aligned}\alpha &= -c_1 \text{Tr} \left\{ [\rho, a^\dagger - a] \rho_c \right\} = -c_1 \langle n_c | [\rho, a^\dagger - a] | n_c \rangle = -2c_1 \left[\sqrt{n_c + 1} \langle n_c | \rho_k | n_c + 1 \rangle - \sqrt{n_c} \langle n_c | \rho_k | n_c - 1 \rangle \right] \\ &= -2c_1 \sqrt{\pi(n_c)} \left[\sqrt{(n_c + 1)\pi(n_c + 1)} - \sqrt{n_c \pi(n_c - 1)} \right] \quad (7-12)\end{aligned}$$

(On appelle $\pi(n) = \rho_{nn}$ la probabilité d'avoir n photons dans l'état avant déplacement). L'équation (7-12) montre que α est négatif si $\pi(n_c + 1) > [n_c / (n_c + 1)] \pi(n_c - 1)$, positif dans le cas contraire. Au cas où $(n_c + 1)\pi(n_c + 1) = n_c \pi(n_c - 1)$, le déplacement à appliquer ainsi calculé est nul. On effectue alors une autre mesure qui conduit en général, après nouvelle projection, à une situation où l'égalité précédente est rompue.

Les opérations de déplacement sont calculées pour systématiquement augmenter (ou au pire laisser inchangée) la fidélité F . Les opérations projectives de mesure, par contre, augmentent ou diminuent F de façon stochastique, selon leur résultat aléatoire. *En moyenne*, cependant, la mesure laisse à chaque pas F inchangée. On a en effet, après une mesure de l'état ρ , projection du champ dans l'état $\sqrt{E_j} \rho \sqrt{E_j} / \text{Tr} E_j \rho$ avec la probabilité $P_j = \text{Tr} E_j \rho$. En moyenne, l'opérateur densité après mesure est donc la somme pondérée par les probabilités respectives:

$$\bar{\rho}_{proj} = \text{Tr} \sqrt{E_g} \rho \sqrt{E_g} + \sqrt{E_e} \rho \sqrt{E_e} \quad (7-13)$$

et la fidélité moyenne après une mesure est:

$$\begin{aligned}F(\bar{\rho}_{proj}) &= \text{Tr} \left\{ \bar{\rho}_{proj} \rho_c \right\} = \text{Tr} \left\{ \sqrt{E_g} \rho \sqrt{E_g} \rho_c \right\} + \text{Tr} \left\{ \sqrt{E_e} \rho \sqrt{E_e} \rho_c \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ (E_e + E_g) \rho \rho_c \right\} = \text{Tr} \left\{ \rho \rho_c \right\} = F(\rho) \quad (7-14)\end{aligned}$$

On exploite pour écrire ces égalités l'invariance de la trace par permutation, la commutation des E_j avec $\rho_c = |n_c\rangle\langle n_c|$ et la relation de complétude $E_e + E_g = I$.

La fidélité moyenne n'est augmentée que par les déplacements

Le calcul précédent montre que dans les cycles déplacement+mesure, c'est le déplacement qui augmente en moyenne la fidélité et non la mesure. Ce résultat est en accord avec ce que nous savons de la mesure QND progressive. Si nous n'appliquons aucun déplacement, nous nous ramenons en effet au cas de la mesure QND décrite au SVII-A comme produit de POVMs successifs. Cette opération à elle seule ne change pas la fidélité moyenne, c'est à dire la probabilité d'avoir finalement n_c photons dans le champ. Sur certaines trajectoires on trouve n_c , mais ce résultat apparaît avec la probabilité $\langle n_c | \rho_{\text{init}} | n_c \rangle$ où ρ_{init} est l'opérateur densité de l'état cohérent initial. Sur toutes les autres trajectoires, la fidélité de l'état final obtenu est 0. En moyenne, on obtient donc $|n_c\rangle$ avec la fidélité $F = \langle n_c | \rho_{\text{init}} | n_c \rangle$. C'est l'application du protocole de rétroaction incluant à chaque pas une injection «intelligente» d'un champ ayant une amplitude soit positive, soit négative en fonction du résultat des mesures qui précèdent qui permet d'augmenter cette fidélité et de l'amener en quelques dizaines de pas à une valeur proche de l'unité.

Les simulations numériques montrent cependant que dans une petite fraction des réalisations, le champ ne converge pas vers n_c mais vers un autre état de Fock. Nous allons chercher à comprendre qualitativement cet effet et décrire une façon simple de l'éviter.

Briser l'attraction possible vers un autre état

Chaque mesure augmente ou diminue de façon aléatoire la fidélité F , recouvrement de l'état obtenu et de l'état cible $|n_c\rangle$ (F restant en moyenne inchangé). Il se peut que sur certaines trajectoires, les premières boucles de mesure-rétroaction conduisent à une diminution de F et à une convergence rapide vers un état $n \neq n_c$. Dans ce cas F devient très petit. Le déplacement appliqué après chaque mesure, proportionnel dans un cas idéal à $\sqrt{\pi(n_c)}$, c-à-d à \sqrt{F} , devient aussi petit comme l'indique l'équ.(7-12). La rétroaction devient alors inefficace pour ramener le champ vers $|n_c\rangle$. Les simulations confirment que dans quelques % des cas, le protocole de rétroaction décrit plus haut converge vers un état autre que n_c . Pour empêcher cette convergence parasite, le protocole de rétroaction est modifié comme suit:

Si après une mesure la fidélité $F(\rho)$ est supérieure à une borne inférieure ε , on applique le protocole indiqué plus haut et on déplace le champ de la quantité donnée par (7-11) (c_1 restant à déterminer). Si par contre $F(\rho) < \varepsilon$, on éloigne le champ du point d'attraction parasite en appliquant un déplacement d'amplitude c_2 , ayant le signe de la différence de n_c et du nombre moyen de photons dans l'état décrit par ρ :

$$\text{si } F(\rho) \geq \varepsilon : \rho \longrightarrow \mathcal{D}(\alpha)\rho \text{ avec } \alpha = -c_1 \text{Tr}\{[\rho, a^\dagger - a]\rho_c\} \quad (c_1 > 0) \quad (7-15)$$

$$\text{si } F(\rho) < \varepsilon : \rho \longrightarrow \mathcal{D}(\alpha)\rho \text{ avec } \alpha = c_2 \text{sgn}(n_c - \langle n \rangle) ; \quad c_2 > 0, \quad \langle n \rangle = \text{Tr}N\rho$$

En brisant ainsi l'attraction vers d'autres états de Fock, on s'assure que le champ ne peut que converger vers n_c . Il nous reste à fixer les paramètres c_1 , c_2 et ε .

Paramètres optimisés de la rétroaction

Revenons à l'expression de la fidélité F en poussant le calcul au second ordre en α :

$$F(\mathcal{D}(\alpha)\rho) = F(\rho) + \left| \langle n_c | [\rho, a^\dagger - a] | n_c \rangle \right|^2 \left(c_1 + \frac{c_1^2}{2} \text{Tr} \left\{ [[\rho, a^\dagger - a], a^\dagger - a] \rho_c \right\} \right) \quad (7-16)$$

Nous pouvons dans la trace du double commutateur remplacer ρ par $\rho_c = |n_c\rangle\langle n_c|$, l'erreur introduite étant d'ordre 3 en $(\rho - \rho_c)$. Cette trace devient:

$$\text{Tr} \left\{ [[\rho_c, a^\dagger - a], a^\dagger - a] \rho_c \right\} = \text{Tr} \left\{ \rho_c [a^\dagger - a]^2 \rho_c + [a^\dagger - a]^2 \rho_c^2 - 2[(a^\dagger - a)\rho_c]^2 \right\} = -\text{Tr} \left\{ [\rho_c, a^\dagger - a]^2 \right\} \quad (7-17)$$

et la trace du carré du commutateur donne simplement:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ [\rho_c, a^\dagger - a]^2 \right\} &= \text{Tr} \left\{ 2\rho_c (a^\dagger - a)\rho_c (a^\dagger - a) - 2\rho_c (a^\dagger - a)^2 \rho_c \right\} \\ &= -2 \langle n_c | (a^\dagger - a)^2 | n_c \rangle = 2 \langle n_c | 2a^\dagger a + 1 | n_c \rangle = 4n_c + 2 \quad (7-18) \end{aligned}$$

En regroupant (7-16,17,18), on met finalement F après déplacement sous la forme:

$$F(\mathcal{D}(\alpha)\rho) = F(\rho) + \left| \langle n_c | [\rho, a^\dagger - a] | n_c \rangle \right|^2 (c_1 - c_1^2 [2n_c + 1]) \quad (7-19)$$

La valeur optimale de c_1 est celle qui maximise cette expression soit:

$$c_1 = \frac{1}{4n_c + 2} \quad (7-20)$$

Pour $n_c=3$, on a $c_1=1/14=0,07$. Quant au déplacement appliqué pour s'éloigner d'un attracteur parasite, on l'applique pour $F < \varepsilon = 0,1$, avec une amplitude $c_2=0,1$. Les simulations montrent que ce sont les valeurs optimales minimisant le risque d'erreur.

Description d'une expérience idéale

Résumons l'analyse précédente en décrivant l'évolution de l'opérateur densité du champ par un produit de super-opérateurs associés à chacune des opérations exécutées en boucle. Après détection du $k^{\text{ème}}$ atome, l'état du champ est:

$$\rho_k = \mathcal{M}_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{D}(\alpha_i) \mathcal{M}_i \right) \rho_0 \quad (7-21)$$

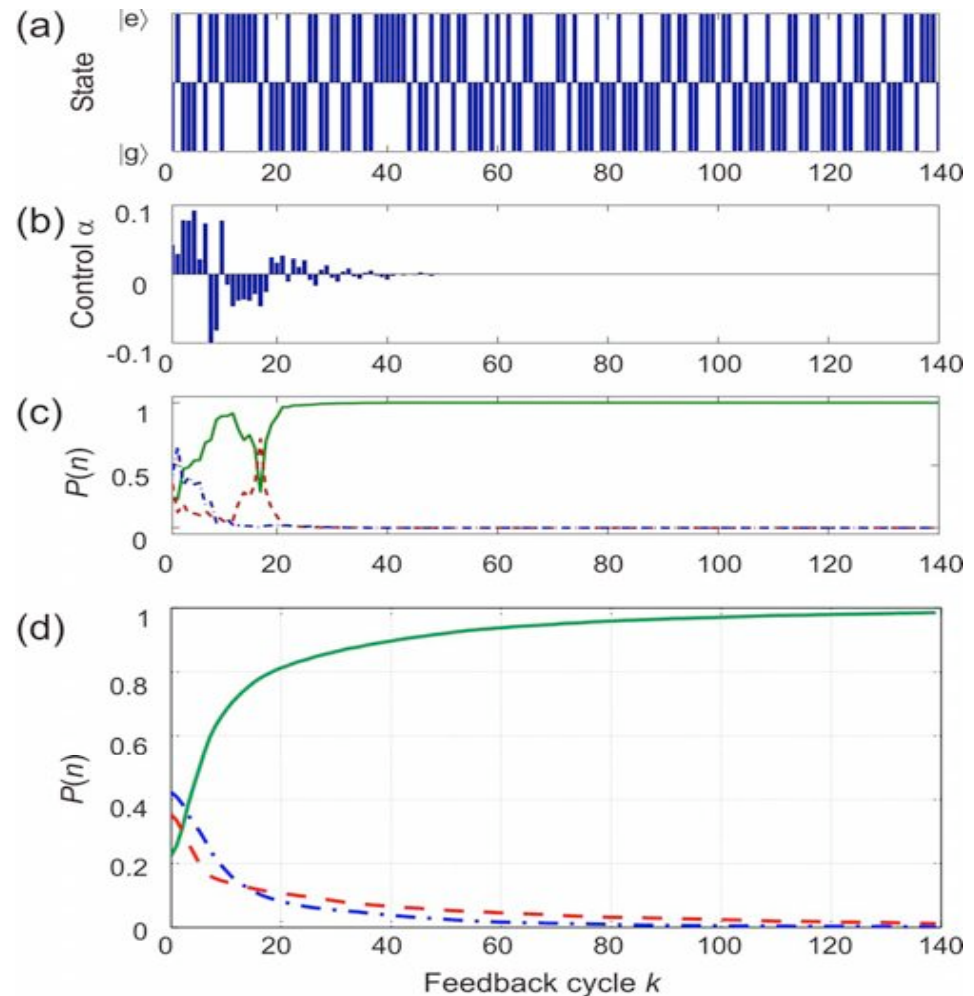
où ρ_0 est le projecteur sur l'état pur initial ($\rho_0 = |\alpha=\sqrt{n_c}\rangle\langle\alpha=\sqrt{n_c}|$), $\mathcal{D}(\alpha_i)$ le super-opérateur déplacement dont l'amplitude α_i , donnée par l'une des équ.(7-15), dépend des résultats des i premières mesures, et \mathcal{M}_i est le super-opérateur associé à la mesure du $i^{\text{ème}}$ atome, défini par la relation:

$$\mathcal{M}_i \rho = \frac{\sqrt{E_{j(i)}} \rho \sqrt{E_{j(i)}}}{\text{Tr}\{E_{j(i)} \rho\}} \quad (7-22)$$

Toute la dynamique du champ au cours d'une séquence est décrite par la suite des k valeurs binaires $j(i) = g$ ou e (que l'on peut aussi bien écrire comme une suite de 0 et 1), résultat des mesures POVM effectuées sur les k atomes, qui déterminent tous les α_i et donc l'expression de l'opérateur densité final ρ_k . Notons que dans la situation idéale décrite ici (pas de relaxation du champ, détection parfaite de tous les atomes), l'opérateur densité, initialement un cas pur, le reste à tout instant puisque les mesures le projettent à chaque pas sur un état pur (aléatoire d'une réalisation à l'autre) et que les déplacements sont des opérations unitaires.

Simulation d'une expérience idéale

Nous avons simulé une expérience idéale visant à préparer l'état $n_c=3$. La simulation exécute les opérations décrites par l'équ. (7-21), réalisées de droite à gauche, en remplaçant les résultats de mesures réelles par un tirage au sort de 0 et de 1, la probabilité P_j du tirage de la valeur j étant à chaque pas donné par la loi $P_j = \text{Tr}\{\rho_i E_j(\phi_r)\}$. Quatre phases différentes ϕ_r des franges de Ramsey sont utilisées en alternance pour accélérer la convergence. On obtient ainsi une série aléatoire de 0 et de 1 qui détermine par les équ. (7-15) une suite de α_i et un opérateur densité $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ calculé pas par pas. Chaque réalisation d'une séquence idéale correspond à une suite différente de 0 et de 1, donc à un ρ_k différent. Dès que k atteint une valeur ~ 30 ou 40 , tous les ρ_k convergent vers le projecteur sur l'état cible $|n_c=3\rangle$. Les figures a,b et c montrent, pour une trajectoire Monte Carlo typique, la suite des états g et e (0 ou 1) détectés, les amplitudes α_i ainsi que l'évolution des probabilités de trouver à chaque pas $n < 3$ (bleu pointillé), $n > 3$ (rouge pointillé) et $n=3$ (vert, trait plein). La fig. d montre les mêmes probabilités moyennées sur 10000 trajectoires. La convergence vers l'état cible, tant pour la trajectoire individuelle que pour la moyenne est claire.



Simulation d'une expérience réelle

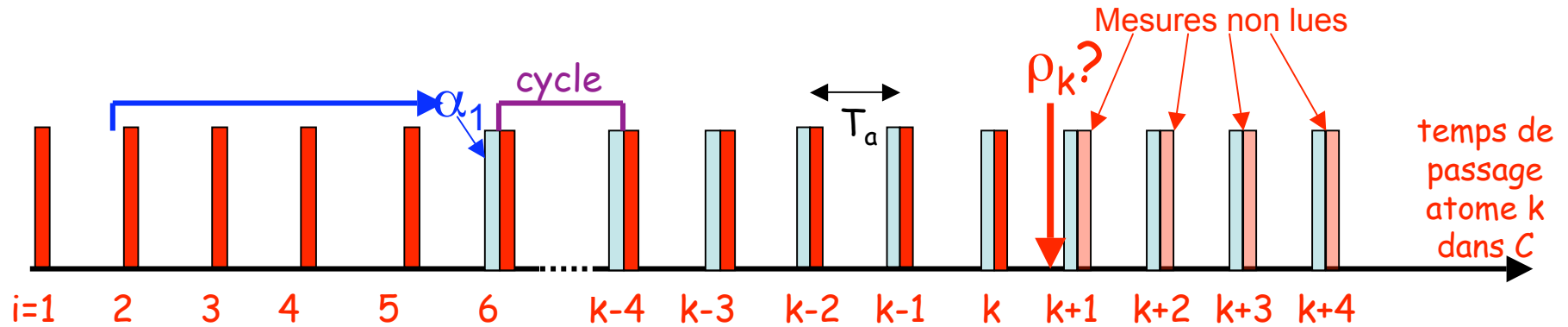
Pour décrire une expérience réelle, il faut d'abord tenir compte de la relaxation du champ. La durée de vie d'un photon dans notre meilleure cavité est $T_c=130$ ms et le nombre moyen de photons thermiques à $T=0,8$ K dans le mode de C est $n_{th}=0,05$. L'évolution du champ due à la relaxation est alors donnée par l'équation pilote:

$$\frac{d\rho}{dt} = L\rho = -\frac{1}{2T_c}(1+n_{th})(a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger) - \frac{1}{2T_c}n_{th}(aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger - 2a^\dagger\rho a) \quad (7-23)$$

Les atomes sondes sont préparés tous les $T_a=85\mu s$, avec une probabilité de succès $\eta_a=0,3$ (les lasers excitant les atomes de Rydberg ont une faible intensité, de façon à éviter la préparation simultanée de 2 atomes ou plus). Le temps de vol entre la cavité C et le détecteur D étant $350\mu s$, une séquence contenant de 0 à $d = 4$ atomes vole de C vers D lorsque un échantillon atomique atteint D . L'algorithme de rétroaction doit tenir compte de ce délai et de l'effet sur le champ de ces atomes non encore détectés.

Il faut aussi tenir compte des imperfections de la détection atomique. L'efficacité de détection est $\eta_d = 0,8$. Le contraste fini des franges de Ramsey, lié à la résolution limitée du détecteur ionisant les atomes correspond à une probabilité $\eta_f = 0,1$ d'erreur dans l'assignation des états e/g . Les paramètres $T_c, n_{th}, \eta_a, \eta_d, \eta_f$ sont déterminés par des expériences de calibration préliminaires. Leur connaissance intervient dans l'estimation de l'opérateur densité du champ à chaque pas i , et donc dans l'évaluation de l'amplitude α_i du champ de rétroaction (pour une analyse plus détaillée du problème de l'estimation d'état, voir cours 2009-2010).

Estimation de l'opérateur densité



A chaque cycle, on détecte l'échantillon (0 ou 1 atome), puis, pendant T_a , on calcule l'opérateur densité et le champ à injecter juste avant la mesure suivante. Les mesures (barres rouges) et injections (barres bleues) sont quasi-instantanées. Dû au délai de propagation des atomes, l'injection effectuée après passage dans C de l'atome i est calculée après mesure de l'atome $i-d$ ($d=4$). Les premières mesures ne sont donc pas influencées par les déplacements. Pour estimer ρ après détection du $k^{\text{ème}}$ atome, on tient aussi compte de la perturbation produite par les atomes qui suivent dans les échantillons en vol qui ont déjà interagi avec C mais dont la mesure n'est pas encore faite, et par les déplacements du champ entre les passages de ces atomes. Le résultat de chaque mesure prend l'une des 3 valeurs: $s(i) = g$ ($j=0$), e ($j=1$) ou pas d'atome détecté (résultat noté u). Appelons $M_{s(i)}^{(r)}$ le super-opérateur décrivant la projection associée à la $i^{\text{ème}}$ mesure (résultat $s(i)$), T le super-opérateur associé à la relaxation du champ pendant T_a et N celui décrivant la modification de ρ due au passage d'un échantillon non encore lu. De l'inspection de la figure on déduit ρ_k juste avant l'injection du $k^{\text{ème}}$ cycle:

$$\rho_k = \left(\prod_{i=k}^{k+d-1} TND_{i-d} \right) TM_{s(k)}^{(r)} \prod_{i=1}^{k-1} D_{i-d} TM_{s(i)}^{(r)} \quad ; \quad (D_{i-d} = I \quad \text{si} \quad i-d \leq 0) \quad (7-24)$$

Les super-opérateurs \mathcal{T} , \mathcal{N} et $\mathcal{M}_s^{(r)}$

L'action de \mathcal{T} correspond à la relaxation du champ pendant le temps $T_a \ll T_c$ et s'écrit:

$$\mathcal{T}\rho \approx (1 + T_a \mathcal{L})\rho = \rho - \frac{T_a}{2T_c} (1 + n_{th}) (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger) - \frac{T_a}{2T_c} n_{th} (a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a) \quad (7-25)$$

Le super-opérateur \mathcal{N} décrit l'effet de la traversée de \mathcal{C} par l'un des 4 échantillons non-lus. Ou bien l'échantillon est vide (probabilité $1 - \eta_a$) et le champ est inchangé, ou bien il y a un atome non encore lu (probabilité η_a) et son effet projette le champ soit dans $M_e \rho$ soit dans $M_g \rho$ avec les probabilités $\text{Tr}\{\rho E_e\}$ et $\text{Tr}\{\rho E_g\}$, ce qui compte tenu de (7-22) donne :

$$\mathcal{N}\rho = (1 - \eta_a)\rho + \eta_a \left(\sqrt{E_e} \rho \sqrt{E_e} + \sqrt{E_g} \rho \sqrt{E_g} \right) \quad (7-26)$$

Restent à déterminer les opérateurs $\mathcal{M}_s^{(r)}$ correspondant aux 3 résultats $s=g$ ($j=0$) ou e ($j=1$) et $s=u$ (pas de clic) dont le calcul demande une analyse en terme de probabilités conditionnelles (voir cours 2009-2010). Soit $p(f|j)$ la probabilité conditionnelle de faire une fausse lecture quand on détecte un atome dans j . L'opérateur $\mathcal{M}_j^{(r)}\rho$ projeté par la mesure j est un mélange des opérateurs $M_j \rho$ et $M_{j \oplus 1} \rho$ avec les probabilités $(1 - p(f|j))$ et $p(f|j)$ (\oplus : addition modulo 2):

$$\mathcal{M}_j^{(r)}\rho = [1 - p(f|j)] M_j \rho + p(f|j) M_{j \oplus 1} \rho \quad (7-27)$$

La probabilité conditionnelle $p(f|j)$ est donnée par la loi de Bayes:

$$p(f|j) = \frac{p(j|f)\eta_f}{p(j)} = \frac{\eta_f \text{Tr}\{\rho E_{j \oplus 1}\}}{(1 - \eta_f) \text{Tr}\{\rho E_j\} + \eta_f \text{Tr}\{\rho E_{j \oplus 1}\}}$$

$$\rightarrow \mathcal{M}_j^{(r)}\rho = \frac{(1 - \eta_f) \sqrt{E_j} \rho \sqrt{E_j}}{(1 - \eta_f) \text{Tr}\{\rho E_j\} + \eta_f \text{Tr}\{\rho E_{j \oplus 1}\}} + \frac{\eta_f \sqrt{E_{j \oplus 1}} \rho \sqrt{E_{j \oplus 1}}}{(1 - \eta_f) \text{Tr}\{\rho E_j\} + \eta_f \text{Tr}\{\rho E_{j \oplus 1}\}} \quad (7-29)$$

Les super-opérateurs (suite)

Il reste à déterminer la projection de l'état quand aucun clic n'est détecté dans l'échantillon. On retrouve le fait qu'une mesure "nulle" change l'état d'un système quantique. Appelons $p(at|u)$ la probabilité conditionnelle d'avoir un atome dans l'échantillon en absence de clic. En absence d'atome (probabilité $1-p(at|u)$), le champ n'est pas modifié et en présence d'un atome non lu (probabilité $p(at|u)$), le champ se projette soit dans $M_g\rho$ soit dans $M_e\rho$ avec les probabilités $\text{Tr}\{\rho E_g\}$ et $\text{Tr}\{\rho E_e\}$:

$$\mathcal{M}_u^{(r)}\rho = [1 - p(at|u)]\rho + p(at|u)\left(\sqrt{E_g}\rho\sqrt{E_g} + \sqrt{E_e}\rho\sqrt{E_e}\right) \quad (7-30)$$

Pour déterminer $p(at|u)$ on utilise à nouveau la loi de Bayes:

$$p(at|u) = \frac{p(u|at)\eta_a}{p(u)} = \frac{(1-\eta_d)\eta_a}{(1-\eta_d)\eta_a + (1-\eta_a)} = \frac{(1-\eta_d)\eta_a}{1-\eta_d\eta_a} \quad (7-31)$$

En regroupant (7-30,31), on obtient l'expression explicite:

$$\mathcal{M}_u^{(r)}\rho = \frac{(1-\eta_a)\rho + (1-\eta_d)\eta_a\left(\sqrt{E_g}\rho\sqrt{E_g} + \sqrt{E_e}\rho\sqrt{E_e}\right)}{1-\eta_d\eta_a} \quad (7-32)$$

Les formules (7-25,26,29 et 32), sont utilisées par l'ordinateur de contrôle pour calculer la trajectoire de l'opérateur densité du champ en fonction de la série de résultats g,e ou u obtenus pour chaque échantillon atomique. En fonction de l'état du champ, il calcule à chaque cycle le champ à injecter par les formules (7-15) et commande cette injection dans C .

Simulation d'une expérience réaliste

La simulation effectue 2 calculs en parallèle. Un premier simule l'évolution **vraie** du champ au cours d'une séquence en boucle, calculant par tirage au sort les résultats $j=g$ ou e d'une mesure qui serait effectuée à l'aide d'un détecteur parfait. La présence d'un atome dans chaque échantillon est aussi décidée par tirage au sort (probabilité η_a de trouver un atome). Dans ce calcul du champ vrai la relaxation est calculée par méthode Monte Carlo (tirage au sort des sauts quantiques et évolution non-unitaire entre sauts). On décrit ainsi l'état du système par un état pur stochastique associé à chaque pas à 3 nombres aléatoires: 0 ou 1 atome et, si 1 atome, g ou e ($j=0$ ou 1). A partir de ces nombres, on simule le résultat d'une mesure réaliste entachée d'erreurs en inversant de façon aléatoire e et g dans une fraction des mesures et en remplaçant dans une autre fraction e ou g par une absence de détection (u). Ces résultats altérés sont présentés comme "données de mesure" à un 2nd calcul qui les utilise pour estimer un opérateur densité et calculer les champs correcteurs à injecter. Ces champs sont appliqués aux deux calculs; celui qui simule l'évolution vraie et celui qui simule la boucle de rétroaction quantique.

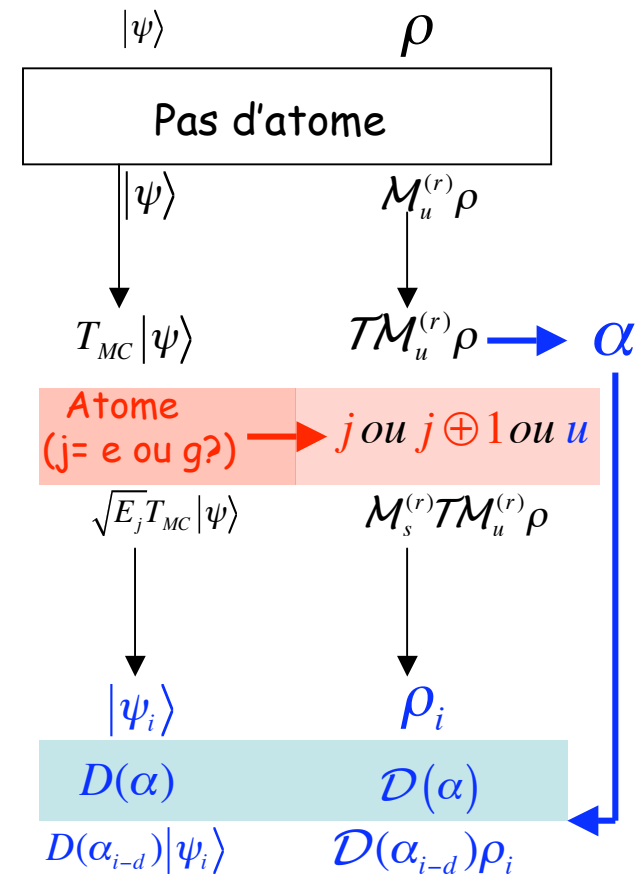
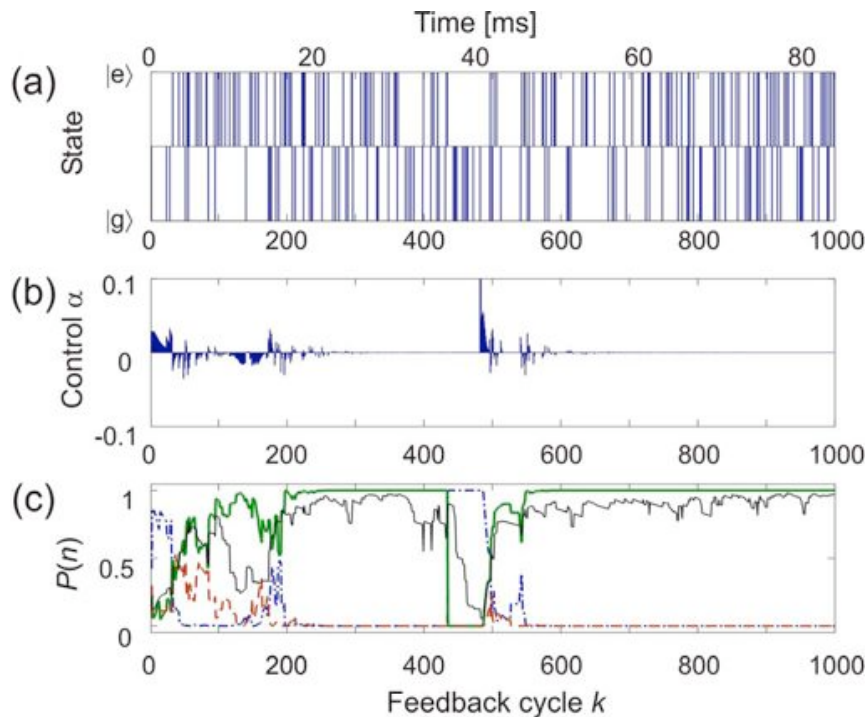


Diagramme de principe du double calcul:
à gauche, état pur Monte Carlo déterminant les résultats aléatoires utilisés à droite pour calculer l'opérateur densité dans la boucle de rétroaction. Les déplacements calculés à droite sont appliqués aux deux séquences.

Simulation de rétroaction quantique: préparer et protéger l'état de Fock $n=3$

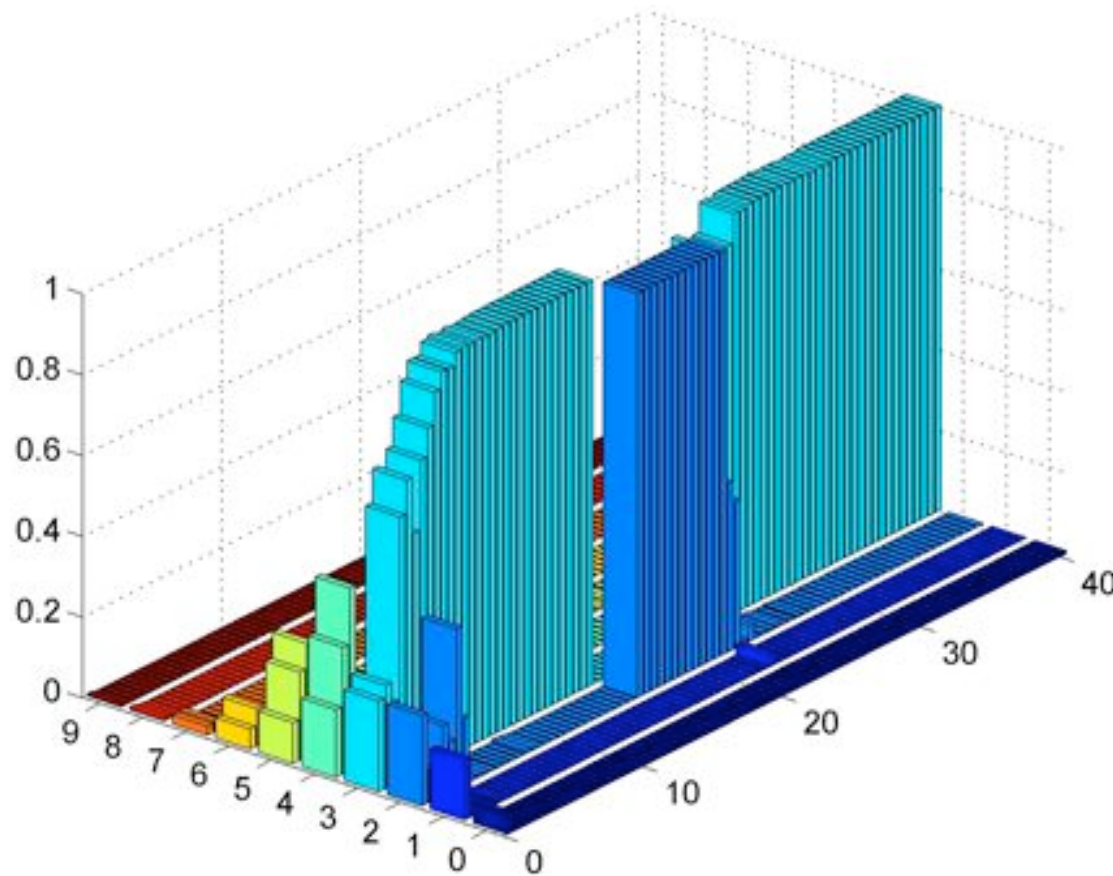


Analyse d'une expérience simulée:

(a) séquence d'atomes détectés (abscisse: temps et rang k du cycle). Noter les nombreux cycles sans atome détecté (résultat u); (b) amplitude du champ de contrôle injecté; (c) évolution des probabilités du nombre de photons: $\Pi(n < n_c)$ (pointillé bleu), $\Pi(n > n_c)$ (pointillé rouge), $\Pi(n_c)$ (trait vert) correspondent à l'état vrai. Le trait noir montre $\Pi(n_c)$ dans l'état estimé par l'appareil imparfait. Seule cette dernière fidélité est directement accessible à une expérience.

La comparaison avec les mesures idéales montre que la fidélité intrinsèque de la rétroaction est bonne: après 20 à 30 atomes détectés (~ 100 cycles) les états estimé et réel sont voisins et proches de la cible $n_c=3$. Cette convergence est perturbée par les sauts quantiques qui ajoutent du bruit sur les courbes (voir page suivante). L'estimation de l'état du champ en temps réel permet de sélectionner les plages de temps où le recouvrement de l'état cible et de l'état estimé est excellente ($F = \Pi(n_c) > 90\%$ entre les cycles 200 et 400 sur cette réalisation).

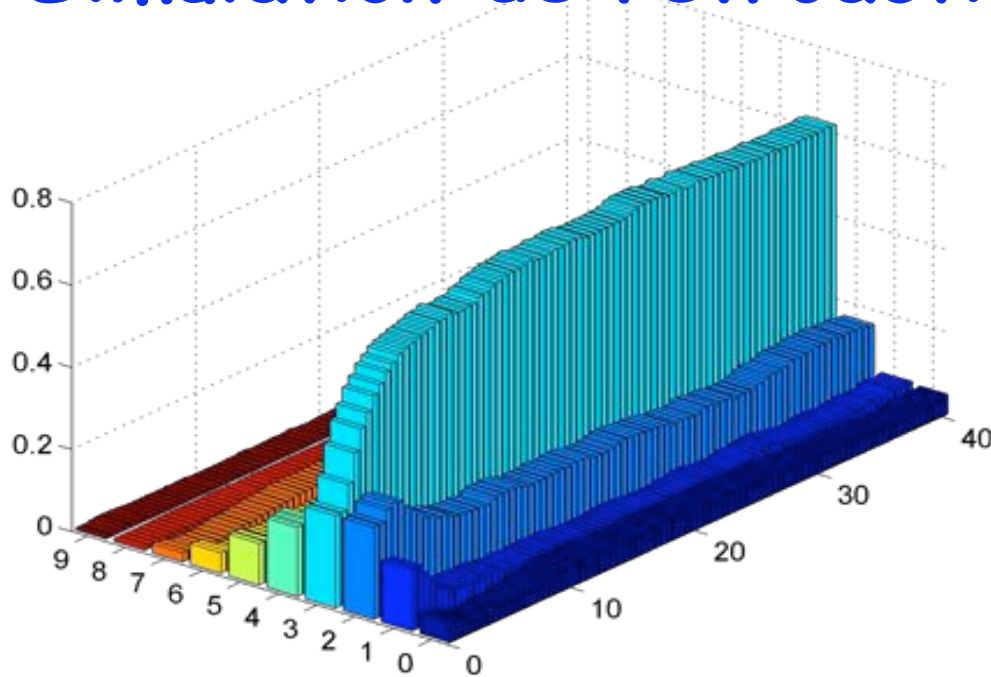
Simulation de rétroaction quantique: préparation et protection de l'état $n=3$



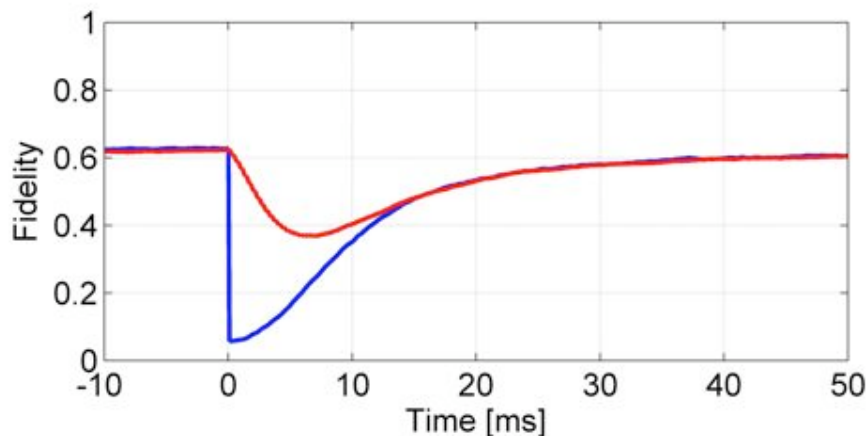
Trajectoire quantique du champ dans une simulation en boucle réalisant la préparation de l'état $n=3$, avec les paramètres expérimentaux décrits plus haut: la distribution de probabilité du nombre de photons dans *le vrai champ* est représentée en fonction du temps. Le champ initial a une distribution Poissonienne avec maximum pour $n=3$. Il tend au bout d'une dizaine de ms (~ 30 atomes

détectés) vers l'état $n_c=3$. Noter le saut quantique vers $n=2$ à $t=14$ ms, et le retour vers $n_c=3$ induit par la rétroaction, une dizaine de ms plus tard (voir page suivante).

Simulation de rétroaction quantique (suite)

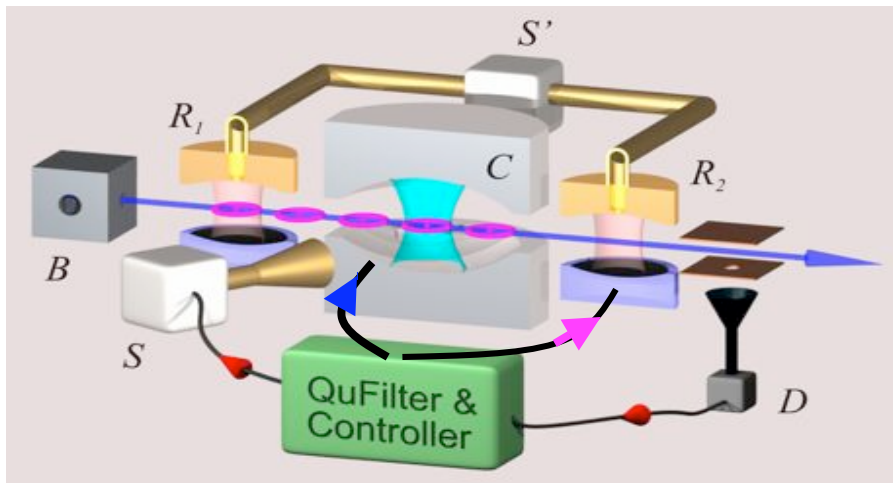


Même distribution en fonction du temps que sur la figure précédente, moyennée sur 10^4 trajectoires. La fidélité moyenne de 65 % est due à la durée de vie de l'état de Fock: les sauts quantiques sont corrigés par la rétroaction, mais la correction prend un temps moyen de l'ordre de 25 ms, de l'ordre de la moitié de la durée de vie $T_c/3$ de l'état.



Réponse à un saut quantique de l'état réel (bleu) et de l'état estimé (rouge). La probabilité $\Pi(n_c)$ dans ces deux états, moyennée sur 10^4 trajectoires est tracée en fonction de t , en prenant sur chaque trajectoire l'instant d'un saut comme origine. L'état réel «voit» le saut instantanément, avec chute brusque de la fidélité. L'état estimé réagit plus lentement et moins fort. Il faut ~ 25 ms pour corriger le saut et revenir à F moyen.

Conclusion de la septième leçon



Nous avons décrit une expérience de rétroaction quantique en cours de réalisation visant à préparer à la demande un état de Fock donné et à protéger cet état de la décohérence en contrecarrant l'effet des sauts quantiques. La procédure présente des analogies avec la correction d'erreur en information quantique. L'expérience pourrait être raffinée en ajustant dans la boucle de rétroaction la phase des franges de Ramsey pour rendre la mesure plus

sensible à des nombres de photons donnés (en agissant sur la phase du champ dans R_2 qui fixe la direction du vecteur de Bloch de l'atome détecté). L'ordinateur de contrôle pourrait aussi agir sur le désaccord de fréquence atome-cavité et donc sur le déphasage par photon (choisi petit au début pour être sensible à une grande gamme de valeurs de n et grand à la fin, pour optimiser la sensibilité au voisinage du nombre de photons cible et réagir plus vite à la perte de photons à partir de cet état). D'autres schémas de rétroaction dans lesquels le champ réinjecté proviendrait d'atomes résonnants intercalés entre les atomes de mesure sont également possibles. Enfin, d'autres procédures pourraient servir à préparer et protéger d'autres types d'états non-classiques. Notons que la grande durée de vie du champ, qui permet des pas assez longs pour donner le temps à l'ordinateur de calculer, est pour ces expériences un atout de l'Electrodynamique quantique en cavité avec des atomes de Rydberg.

Références:

- Pour une description détaillée de ce travail, voir: *I.Dotsenko, M.Mirrahimi, M.Brune, S.Haroche, J-M.Raimond et P.Rouchon, Phys.Rev.A80, 013805 (2009)*
- voir aussi: *J.M.Geremia, Phys.Rev.Lett. 97, 073601 (2006).*