Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe YOCCOZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Fers à cheval non uniformément hyperboliques (suite)

Le cours, dans la continuité de celui de l'année précédente, a poursuivi l'étude (en collaboration avec J. Palis) des ensembles invariants observés lors d'une bifurcation homocline générique d'un difféomorphisme du plan.

Dans le résumé du cours 1998-99, j'ai expliqué comment, pour un tel difféomorphisme g, on est amené à introduire une famille finie de rectangles $(R_a)_{a \in \mathscr{A}}$ et des régions lenticulaires $L_u \subset R_{a_u}$, $L_s \subset R_{a_s}$ possédant les propriétés suivantes :

1. l'ensemble invariant

$$K_g = \cap_{n \in Z} g^{-n}(\cup_a R_a)$$

est un ensemble basique, non trivial, de type selle ; la famille de rectangles $(R_a)_{a \in \mathscr{A}}$ induit pour la dynamique de g sur K_g une partition de Markov dont les transitions sont codées par une partie $\mathscr{B}$ et $\mathscr{A}^2$;

2. il existe un entier $N_0 > 1$ tel que g^{N_0} induise un difféomorphisme de L_u sur L_s et tel que $g^i(L_u)$ ne rencontre aucun des R_a pour $0 < i < N_0$;

3. l'ensemble invariant qu'on souhaite étudier est défini par

$$\Lambda_g = \cap_{n \in Z} g^{-n}(\cup_a R_a \cup_{0 < i < N_0} g^i(L_u)).$$

La dynamique est ainsi constituée

– des applications de transition

$$g : g^{-1}(R_{a'}) \cap R_a \to R_{a'} \cap g(R_a), \ (a, a') \in \mathscr{B} ;$$

– du difféomorphisme de " pliage " $g^{N_0} : L_u \to L_s$.

Appelons morceau régulier de la dynamique un triplet (P, Q, n) tel que

i) P est un sous-rectangle vertical de l'un des R_a, Q est un sous-rectangle horizontal de l'un des R_a et g^n induit un difféomorphisme de P sur Q ;

ii) la restriction de g^n à P satisfait à une condition de cône et vérifie une estimation de distorsion universelle.

La condition de distorsion permet de définir les épaisseurs $|P|$, $|Q|$ de P, Q respectivement. Pour des morceaux réguliers (P, Q, n), (P', Q', n'), on est amené à considérer deux types de composition.

La composition simple, ou hyperbolique, est licite dès que Q et P' sont contenus dans le même rectangle R_a. On pose

$$P'' = P \cap g^{-n}(P'),$$
$$Q'' = Q' \cap g^{n'}(Q),$$
$$n'' = n + n'.$$

et le triplet (P'', Q'', n'') est le résultat de cette composition.

La composition parabolique est beaucoup plus subtile, et c'est elle qui est à l'origine de la complexité de la dynamique. Pour qu'elle soit possible, il faut d'abord que Q traverse la région lenticulaire L_u et que P' traverse la région lenticulaire L_s. Ceci étant, il faut que la bande parabolique $g^{-N_0}(P' \cap L_s)$ rencontre la bande horizontale Q suivant deux composantes connexes, ce qui permet de définir une distance $d(Q,P')$ entre le sommet de la bande parabolique et la bande horizontale. La composition parabolique est alors licite dès que

$$d(Q,P') \geq \max(|Q|, |P'|)^{1-\eta}$$

où $0 < \eta << 1$ est une constante. On note alors $\hat{P}^{\pm}$ les deux composantes de $P \cap g^{-n}(L_u) \cap g^{-(n+N_0)}(P')$, $\hat{Q}^{\pm}$ les deux composantes de $Q' \cap g^{n'}(L_s) \cap g^{n'+N_0}(Q)$ et on pose $\hat{n} = n + n' + N_0$. Les résultats de la composition parabolique sont les deux triplets $(\hat{P}^+, \hat{Q}^+, \hat{n})$ et $(\hat{P}^-, \hat{Q}^-, \hat{n})$.

Appelons alors $\mathscr{R}$ la plus petite famille de morceaux réguliers qui contient les applications de transitions initiales et qui est stable par composition simple ou parabolique.

Soit $(P, Q, n) \in \mathscr{R}$. On dit que n est l'ordre de P (ou Q) ; on dit que P est primitif si (P, Q, n) ne peut être obtenu par composition simple à partir de triplets de R (d'ordre inférieur à n). Lorsque P est primitif, on pose $j(P) = 1$ et on appelle $T(P)$ celui des rectangles R_a qui contient Q. Lorsque P n'est pas primitif, on désigne par (P_0, Q_0, n_0) le triplet tel que P_0 soit le plus petit rectangle primitif contenant P ; on appelle $T(P)$ le rectangle P_1 tel que P soit obtenu par composition simple à partir de (P_0, Q_0, n_0) et $(P_1, Q_1 n_1)$; et on définit par induction $j(P) = j(T(P)) + 1$.

Considérons alors l'ensemble $\mathscr{R}^\infty$ des *courbes stables* ω qui sont intersection d'une suite décroissante de rectangles P_k (pour des triplets $(P_k, Q_k, n_k) \in \mathscr{R}$), et parmi celles-ci, la partie $\mathscr{W}$ de $\mathscr{R}^\infty$ constituée des courbes qui ne sont contenues que dans un nombre fini de rectangles primitifs. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des rectangles primitifs. Si P est un rectangle primitif d'ordre n, notons $\mathscr{R}^\infty(P)$ l'ensemble des courbes $\omega \in \mathscr{W}$ telles que P soit le plus petit rectangle primitif contenant ω, et définissons $\omega' = T(\omega)$ comme étant la courbe stable qui contient $g^n(\omega)$.

L'application $T : \mathscr{W} \to \mathscr{R}^\infty$ est une application de Bernoulli. J'avais expliqué dans le cours 1998-99 comment construire un opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius associé à T, qui permette de définir une dimension de Hausdorff $\tilde{d}_s$ de $\mathscr{R}^\infty$ et une mesure invariante géométrique. Pour que cette construction soit possible, une condition est requise sur la famille $\mathscr{R}$, c'est-à-dire sur le difféomorphisme g. Notons d_s (resp. d_u) la dimension de Hausdorff transverse du feuilletage stable $W^s(K_g)$ (resp. du feuilletage instable $W^u(K_g)$). On doit trouver des constantes $0 < d^* < d_S$, $0 < k_1, k_2 < 1$, telles que, si on définit, pour $(P, Q, n) \in \mathscr{R}$:

$$\|P\| = k_1^{j(P)} \, |P|^{d^*}$$

alors on a, pour $(P, Q, n) \in \mathscr{R}$

$$\text{(C1)} \qquad \sum_{P'} \|P'\| \leq k_2 \, \|P\|$$

où la somme porte sur les rectangles P' tels que P soit le plus petit rectangle contenant strictement P'.

Quand on veut à partir de la mesure géométrique T – invariante donnée par l'opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius reconstruire une mesure géométrique g – invariante, on est amené à introduire une condition supplémentaire

$$\text{(C2)} \qquad \sum_{P \in \mathscr{P}} n(P) \, |P|^{d^*} < + \infty$$

où $n(P)$ désigne l'ordre d'un rectangle primitif P.

D'autre part, pour que cette mesure géométrique g – invariante rende compte de façon essentielle de la dynamique de g sur Λ_g, il est souhaitable d'obtenir la propriété suivante. Considérons, dans l'un des rectangles R_a, une courbe instable ω (intersection d'une suite décroissante de rectangles horizontaux Q_j) ; sur cette courbe, qui rencontre l'ensemble des courbes stables suivant un ensemble de dimension $\tilde{d}_s$, considérons l'ensemble ε_ω des points qui restent sous itération positive dans $\cup_a R_a \cup_{0 < i < N_0} g^i(L_u)$ sans jamais appartenir à une courbe stable.

On doit alors avoir

$$\text{(C3)} \qquad HD(\varepsilon_\omega) \leq d^*(< \tilde{d}_s \approx d_s).$$

Il s'agit ainsi de montrer qu'au voisinage de la bifurcation homocline (c'est-à-dire lorsque les régions lenticulaires L_u, L_s sont assez petites) la classe $\mathscr{R} = \mathscr{R}_g$ de morceaux réguliers vérifie les conditions (C1), (C2), (C3) pour la plupart des difféomorphismes g. Ceci s'effectue en deux temps : on introduit une condition (C4) qui implique (C1), (C2), (C3) puis on prouve que cette condition est le plus souvent satisfaite.

Soient (P, Q, n) un élément de $\mathscr{R}$ et δ un réel strictement positif. Lorsque $\delta \geq |Q|^{1-\eta}$ (resp. $\delta = |Q|^{1-\eta}$)), on dira que Q est δ-critique (resp. critique) s'il existe $(P', Q', n') \in \mathscr{R}$ tel que

$$|P'|^{1-\eta} \leq \delta, \; d(P', Q) \leq \delta$$

(ceci sous-entend que Q traverse L_u et P' traverse L_s). On peut alors formuler

(C4) Il n'existe pas de triplet $(P, Q, n) \in \mathscr{R}$ tel que P et Q soient $\delta_{P,Q}$-critiques, avec $\delta_{P,Q} = \max(|P|, |Q|)^{1-\eta}$.

Supposons que le difféomorphisme g vérifie la condition (C4). Définissons

$$W^s(\Lambda_g, R) = \cap_{n \geq 0}\, g^{-n}(\cup_a R_a \cup_{0 < i < N_0} g^i(L_u)) \; ;$$

pour $(P, Q, n) \in \mathscr{R}$, le *noyau* de P est l'ensemble des points de $P \cap W^s(\Lambda_g, \mathrm{R})$ qui n'appartiennent à aucun rectangle P' (avec $(P', Q', n') \in \mathscr{R}$) strictement contenu dans P. On montre alors que le noyau d'un rectangle critique est toujours vide. Une autre estimation cruciale, conséquence de (C4), est la suivante : pour tout triplet (P, Q, n), et tout $\varepsilon > 0$ le nombre de triplets (P', Q', n') tels que $|P'| \geq \varepsilon\,|P|$, P étant le plus petit rectangle contenant P', est majoré par $C\varepsilon^{-c\eta}$, où C est une constante universelle. Il n'est ensuite pas très difficile de déduire (C1) et (C2) de cette estimation.

Quant à (C3), on analyse l'ensemble exceptionnel ε_ω comme suit. Tout d'abord, on a une partition

$$\varepsilon_\omega = \cup_P \varepsilon_\omega^P$$

où ε_ω^P est l'intersection de ε_ω avec le noyau de P. En notant alors n_P l'ordre de P, et ω_P le plus petit segment de ω qui contient ε_ω^P, on considère l'arc parabolique $\overline{\omega}_P = \mathrm{g}^{n_P+N_0}(\omega_P)$; les rectangles P' qui rencontrent $\overline{\omega}_P$, vérifient

$$\mathrm{d}(\overline{\omega}_P, P') \geq |P'|^{1-\eta}$$

et sont maximaux pour cette propriété, forment une famille finie ou dénombrable I_P. Pour chaque $P' \in I_P$, l'intersection de $\overline{\omega}_P$ avec P' a deux composantes connexes dont les images par $g^{n'}$ sont deux courbes instables $\omega^{\pm}_{P,P'} \subset Q'$.

Lorsque I_P est finie, on a

$$\varepsilon_\omega^P = \cup_{I_P} g^{-(n+n'+N_0)}(\varepsilon_{\omega^{\pm}_{P,P'}})$$

tandis que lorsque I_P est dénombrable il faut rajouter à la partition précédente le point $g^{(n+N_0)}(c_P)$, où c_P est le point *critique* où l'arc parabolique $\overline{\omega}_P$ est tangent à la courbe stable $\hat{\omega}$ limite des rectangles P'.

Dans tous les cas, on a déterminé une structure récursive pour ε_ω qui permet assez facilement d'obtenir (C3).

Le dernier point (mais essentiel !) de notre travail est d'établir que la condition (C4) est satisfaite par la plupart des difféomorphismes g.

On considère une famille à un paramètre g_t transverse à l'hypersurface de bifurcation.

Le paramètre t correspond à la distance à cette hypersurface, ou à l'épaisseur des régions lenticulaires L_s et L_u. On fixe un entier $M >> 1$, et on s'intéresse aux paramètres $t \in [2^{-M}, 2^{1-M}] = I_0$. On pose $\varepsilon_0 = 2^{-M}$ puis, pour $k \geq 0, \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1+\Delta}$(où Δ est une constante, $0 < \Delta << 1$).

A l'issue de la $k^{\text{ième}}$ étape de l'induction, on dispose d'intervalles I_k, de longueur ε_k, qui satisfont à un certain nombre de condition à l'échelle ε_k. On divise chacun d'entre eux en $\varepsilon_k^{-\Delta}$ sous-intervalles candidats I_{k+1} de longueur ε_{k+1}, et on ne garde à l'issue de la $(k + 1)^{\text{ème}}$ étape que ceux qui ont satisfait les conditions requises à l'échelle ε_{k+1}. On pourra conclure si le processus de sélection n'élimine pas trop de candidats.

Quelles sont les conditions à satisfaire à l'échelle ε_k ? On veut bien sûr avoir

$(C4)_k$ Il n'existe pas de triplet $(P, Q, n) \in R$ tel que $\delta_{P,Q} \geq \varepsilon_k$ et P, Q sont $\delta_{P,Q}$-critiques.

Cette condition isolée se prête cependant mal à l'induction. Il faut introduire des conditions supplémentaires. La première limite le nombre de rectangles critiques.

$(C5)_k$ Le nombre de triplets (P, Q, n) tels que P (resp. Q) est critique et vérifie $|P| \geq \varepsilon_k$ (resp. $|Q| \geq \varepsilon_k$) est $\leq C\varepsilon^{1-d_s-d_u-c\eta}$.

D'autre part, on introduit une paire de conditions $(C6)_{k,s}$, $(C6)_{k,u}$ qui généralise $(C4)_k$. Pour $1 \leq \theta \leq 1 + d_u/d_s$, considérons l'ensemble $A_s(\theta, k)$ des triplets (P, Q, n) tels que P et Q sont ε_k-critiques et $\mathrm{P} \geq \varepsilon_k^{\theta}$. On veut alors avoir (en supposant $d_s \geq d_u$)

$$(C6)_{k,s} \qquad \# A_s(\theta, k) \leq C\varepsilon^{\mathrm{a}-bd_s\theta-c\eta}$$

avec $\mathrm{a} = 1 - d_u$, $\mathrm{b} = \dfrac{1 - 2d_s - d_u}{d_s + d_u}$

On définit de façon analogue $A_u(\theta, k)$ et

$$(C6)_{k,u} \qquad \# A_u(\theta, k) \leq C\varepsilon^{\mathrm{a}-bd_u\theta-c\eta}$$

Pour déduire $(C4)_k$ de $(C6)_{k,s}$, $(C6)_{k,u}$, il faut avoir $A_s(1, k) = A_u(1, k) = 0$, c'est-à-dire $a > bd_s$, ce qui conduit à la condition

$$2d_s + d_u > 2d_s^2 + 2d_sd_u + \mathrm{d}_\mathrm{u}^2$$

sur les dimensions de Hausdorff transverses de $W^s(K_g)$, $W^u(K_g)$.

La démonstration de $(C6)_{k,s}$, $(C6)_{k,u}$ enfin se fait en deux étapes : une induction facile lorsque $1 \leq \theta \leq \dfrac{\theta_{\max}}{1 + \Delta}$, basée sur un calcul de valeur moyenne pour $A_S(\theta, k + 1)$; et une estimation directe s'appuyant sur $(C5)_k$ lorsque $\theta \simeq \theta_{\max}$.

J.-C. Y.

Missions, Invitations, Conférences

(7/99–5/00)

1/7–16/07/99, 26/07–28/08/99, 1/10–30/10/99 : Missions à l'IMPA (Instituto de Matematica Pura et Aplicada), Rio de Janeiro, Brésil. 6 heures de conférence durant cette période.

18/07–24/07/99 : Codirecteur du colloque « Dynamical systems », Oberwolfach, Allemagne.

16-17/09/99 : Conférencier invité à un colloque de dynamique des populations à l'Académie des sciences norvégienne, Oslo, Norvège.

17/11/99 : « Les systèmes dynamiques : du système solaire à la météorologie », conférence au Collège de France.

19/11/99 : Conférence lors de l'inauguration de l'Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille.

26/11/99 : « Quasi périodicité et hyperbolicité », conférence lors d'une journée « Histoire des mathématiques » sur les systèmes dynamiques.

13/12–19/12/99 : Mission à Udine, 1 conférence d'intérêt général.

16/03–19/03/00 : Colloque à l'Université du Maryland (USA), 2 conférences.

2/05–5/05/00 : Série de 4 conférences à Porto (Portugal) dans le cadre d'une École de Systèmes dynamiques.

8/05–13/05/00 : Conférence dans le cadre d'un Colloque de Systèmes dynamiques à Porto (j'étais par ailleurs membre du Comité Scientifique).

27/05/00 : Conférence « grand public » à Carcassonne.