Équations différentielles et systèmes dynamiques

M. Jean-Christophe Yoccoz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours : Échanges d'intervalles (suite)

1. Le cours avait cette année pour objet un théorème obtenu en collaboration avec A. Avila et S. Gouezel.

Soit M une surface compacte orientée de genre $g \geq 1$ et de classe C^∞, $\Sigma = \{A_1, ..., A_s\}$ une partie finie non vide de M, $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_s)$ une famille d'entiers strictement positifs vérifiant

$$\sum_1^s (\kappa_i - 1) = 2g - 2$$

Notons Diff (M, Σ) le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de M qui fixent chaque point de Σ, $\mathrm{Diff}_0\,(M, \Sigma)$ la composante neutre et Mod (M, Σ) le groupe quotient.

Une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) est la donnée d'un atlas maximal de cartes de $M - \Sigma$ par des ouverts de $\mathbf{C}$, tel que les changements de cartes soient localement des translations, et qu'au voisinage de A_i les cartes soient induites par un revêtement ramifié de degré κ_i sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$.

Il revient au même de se donner une structure complexe sur M et une 1-forme ω holomorphe pour cette structure qui ne s'annule pas sur $M - \Sigma$ et admet en A_i un zéro d'ordre $\kappa_i - 1$.

Une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) détermine plusieurs structures géométriques auxiliaires :

— une métrique plate sur $M - \Sigma$;

— une orientation sur M ;

— une 2-forme d'aire $dx \wedge dy$;

— un champ de vecteurs vertical $\partial / \partial y$ et un champ de vecteurs horizontal $\partial / \partial x$.

Fixons un revêtement universel

$$p : (\tilde{M}, \star) \to (M, A_1)$$

Étant donnée une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ), l'intégration de la 1-forme ω définit une application développante

$$D : (\tilde{M}, \star) \to (\mathbf{C}, 0)$$

qui détermine de façon unique la structure.

La topologie compacte-ouverte sur l'ensemble des applications développantes détermine donc une topologie sur l'espace des structures de surface de translation sur (M, Σ, κ). Le groupe Diff (M, Σ) agit sur cet espace. On appelle espace des modules (resp. espace de Teichmuller) et on note $\mathcal{M}\,(M, \Sigma, \kappa)$ (resp. $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$) l'espace quotient par l'action de Diff (M, Σ) (resp. de $\mathrm{Diff}_0\,(M, \Sigma)$). Le groupe quotient Mod (M, Σ) agit donc sur $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$.

L'intégration de ω définit une application de période

$$\Theta : \mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa) \to H^1\,(M, \Sigma, \mathbf{C})$$

qui est un homéomorphisme local, permettant de munir $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$ d'une structure de variété complexe (affine) de dimension $2g + s - 1$ et d'une forme volume canonique.

Le groupe discret Mod (Σ, κ) agit proprement mais pas librement sur $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$.

Le groupe $GL\,(2, \mathbf{R})$ agit sur l'espace des structures de surface de translation sur (M, Σ, κ) par postcomposition des cartes des atlas. Cette action commute avec celle de Diff (M, Σ), et descend donc à $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$ et $\mathcal{M}\,(M, \Sigma, \kappa)$. On notera $\mathcal{Q}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$ (resp. $\mathcal{M}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$) l'hypersurface de $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$ (resp. $\mathcal{M}\,(M, \Sigma, \kappa)$) correspondant aux surfaces de translation dont l'aire algébrique est égale à 1. Ces hypersurfaces sont invariantes par l'action de $SL\,(2, \mathbf{R})$.

Le flot de Teichmuller (T^t) est la restriction de cette action de $SL\,(2, \mathbf{R})$ au sous-groupe diagonal diag (e^t, e^{-t}). L'action de $SL\,(2, \mathbf{R})$ préserve les mesures canoniques sur $\mathcal{Q}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$ et $\mathcal{M}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$.

Un théorème fondamental de Masur et Veech garantit que la mesure canonique sur $\mathcal{M}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$ a une masse totale finie, et que la restriction du flot de Teichmuller à toute composante connexe de $\mathcal{M}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$ est ergodique et même mélangeante.

Le résultat obtenu avec Avila et Gouezel est que cette restriction est exponentiellement mélangeante : si φ, ψ sont des fonctions lisses de moyenne nulle sur une telle composante, les corrélations

$$c_t\,(\varphi, \psi) = \int \varphi \,.\, \psi \circ T^t$$

tendent exponentiellement vite vers 0 à un taux indépendant de φ, ψ.

2. Dans le cas du genre 1, avec un seul point marqué $(s = 1)$, l'espace des modules n'est autre que l'espace homogène $SL\,(2, \mathbf{R}) \,/\, SL\,(2, \mathbf{Z})$, fibré unitaire tangent sur la surface modulaire, et le flot de Teichmuller s'identifie au flot géodésique. Le résultat, déjà probablement connu de Gelfand, devient un cas particulier d'un théorème de Ratner.

Il est intéressant d'observer que Ratner déduit le mélange exponentiel de l'existence d'un trou spectral pour la représentation de $SL\,(2, \mathbf{R})$ associée à l'action de ce groupe sur l'espace homogène $SL\,(2, \mathbf{R}) \,/\, SL\,(2, \mathbf{Z})$.

Inversement, il n'est pas difficile de voir que le mélange exponentiel du flot de Teichmuller implique l'existence d'un trou spectral pour les représentations de $SL\,(2, \mathbf{R})$ déduites de l'action de ce groupe sur les composantes connexes de l'espace des modules $\mathcal{M}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$.

Rappelons que, après Bargmann, les représentations irréductibles unitaires de $SL\,(2, \mathbf{R})$ se regroupent suivant les séries discrète, principale et complémentaire (outre la représentation triviale). La série complémentaire est paramétrée par un réel $u \in (0, 1)$; l'espace de Hilbert de la représentation est

$$H_u = \left\{ f : S^1 \to \mathbf{C},\ \|f\|^2 = \int\!\!\int_{S^1 \times S^1} \frac{f(x)\,\overline{f(y)}}{|x - y|^{1-u}} < +\infty \right\}$$

et l'action du groupe est l'action projective via l'isomorphisme de $SL\,(2, \mathbf{R})$ et $SU\,(1, 1)$. L'existence du trou spectral signifie qu'il existe $u_0 \in (0, 1)$ tel qu'aucune composante irréductible dans la représentation considérée n'est isomorphe à une représentation de la série complémentaire avec paramètre $u \in (u_0, 1)$.

Il est raisonnable de conjecturer qu'un résultat plus fort est vrai : dans la désintégration des représentations de $SL\,(2, \mathbf{R})$ associées à l'action de ce groupe sur les espaces de modules $\mathcal{M}^{(1)}\,(M, \Sigma, \kappa)$, la série complémentaire n'intervient pas du tout (pas plus qu'elle n'intervient dans la formule de Parseval pour $SL\,(2, \mathbf{R})$).

3. L'algorithme de fraction continue de Rauzy-Veech pour les échanges d'intervalles, longuement discuté dans le cours de l'année précédente, joue un rôle central dans l'analyse des propriétés du flot de Teichmuller.

Soit ainsi $\mathcal{D}$ un diagramme de Rauzy sur un alphabet A: les sommets sont des données combinatoires $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ et les flèches correspondent aux opérations élémentaires de l'algorithme de Rauzy-Veech (voir le résumé de cours 2004-2005).

Notons Δ_π (resp. Θ_π) le cône convexe de $\mathbf{R}^A$ formé des données de longueur (resp. données de suspension) associées à π. Le choix canonique pour de telles données est

$$\lambda_\alpha^{\mathrm{can}} = 1,\ \tau_\alpha^{\mathrm{can}} = \pi_b(\alpha) - \pi_t(\alpha)$$

pour tout $\alpha \in A$. Chaque flèche $\gamma \colon \pi \to \pi'$ de $\mathcal{D}$ définit une matrice $B_\gamma \in SL\,(A, \mathbf{Z})$ vérifiant

$$^tB_\gamma\,(\Delta_{\pi'}) \subset \Delta_\pi,$$

$$^tB_\gamma^{-1}\,(\Theta_\pi) \subset \Theta_{\pi'}.$$

Soit π un sommet de $\mathcal{D}$. Les choix canoniques de données de longueur et de suspension produisent une surface de translation $(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi)$. Cette surface de translation est d'ailleurs canoniquement marquée, c'est-à-dire qu'une séparatrice sortante du champ de vecteurs horizontal au point marqué A_1 a été distinguée. On notera $\tilde{\mathcal{Q}}\,(M, \Sigma, \kappa)$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}\,(M, \Sigma, \kappa)$) l'espace de Teichmuller (resp. l'espace des modules) de surfaces de translation marquées : $\tilde{\mathcal{Q}}\,(M, \Sigma, \kappa)$ est un revêtement de $\mathcal{Q}\,(M, \Sigma, \kappa)$ de degré κ_1. En laissant varier les données de longueur et de suspension, on obtient un plongement :

$$i : \Delta_\pi \times \Theta_\pi \mapsto \tilde{\mathcal{Q}}\,(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi).$$

On observera que la donnée combinatoire π détermine une base de $H_1\,(M_\pi, \Sigma_\pi, \mathbf{Z})$; quand on compose i et l'application de période Θ vue à valeurs dans $\mathbf{C}^A$, on obtient le plongement canonique de $\Delta_\pi \times \Theta_\pi$ dans $\mathbf{C}^A$.

Chaque flèche $\gamma\colon \pi \to \pi'$ dans le diagramme de Rauzy détermine un isomorphisme

$$j_\gamma\colon \tilde{\mathcal{Q}}\,(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi) \to \tilde{\mathcal{Q}}\,(M_{\pi'}, \Sigma_{\pi'}, \kappa_{\pi'})$$

qui se traduit par ${}^tB_\gamma^{-1}$ au niveau des applications de période et $\mathbf{C}^A$. L'image de $i\,(\Delta_\pi \times \Theta_\pi)$ par j_γ rencontre alors $i\,(\Delta_{\pi'} \times \Theta_{\pi'})$.

Étendons fonctoriellement la définition de j_γ à tout chemin non orienté dans le diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$. Définissons alors, pour tout sommet π, un ouvert connexe $\mathcal{U}_\pi$ de $\tilde{\mathcal{Q}}\,(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi)$ comme l'union des $j_\gamma^{-1}\,(i\,(\Delta_{\pi'} \times \Theta_{\pi'}))$, lorsque γ décrit les chemins non orientés issus de π (et on note π' l'extrémité de γ).

Notons $\pi_1\,(\mathcal{D}, \pi)$ le groupe fondamental du diagramme $\mathcal{D}$ basé en π ; l'application $\gamma \to j_\gamma$ est un homomorphisme de ce groupe sur un sous-groupe Mod_0 (M_π, Σ_π) du groupe modulaire $\mathrm{Mod}\,(M_\pi, \Sigma_\pi)$ (probablement égal au sous-groupe d'indice 2 correspondant à préserver l'orientation).

Il n'est pas difficile de voir qu'un élément g du groupe modulaire appartient à $\mathrm{Mod}_0\,(M_\pi, \Sigma_\pi)$ si et seulement si il préserve $\mathcal{U}_\pi$, et ceci se produit si et seulement si $g\,(\mathcal{U}_\pi)$ rencontre $\mathcal{U}_\pi$.

Notons C_π la composante connexe de $\tilde{\mathcal{Q}}\,(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi)$ qui contient l'ouvert connexe $\mathcal{U}_\pi$.

Le complémentaire $C_\pi - \mathcal{U}_\pi$ est de codimension réelle 2 dans C_π. Plus précisément, si ζ est une structure de surface de translation marquée sur $(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi)$ qui appartient à $C_\pi - \mathcal{U}_\pi$, il existe une connexion du champ vertical qui rencontre au plus une fois la séparatrice distinguée du champ horizontal ; en particulier, le champ vertical et le champ horizontal doivent avoir des connexions.

On notera que chaque domaine $i\,(\Delta_\pi \times \Theta_\pi)$, et donc aussi chaque ouvert $\mathcal{U}_\pi$, est invariant par le flot de Teichmuller. Le sous-groupe $\mathrm{Mod}_0\,(M_\pi, \Sigma_\pi)$ est le stabilisateur de C_π pour l'action du groupe modulaire, et aussi le stabilisateur de l'ouvert $\mathcal{U}_\pi$. On construit un domaine fondamental $\mathcal{M}\,(\mathcal{D})$ pour l'action de $\mathrm{Mod}_0\,(M_\pi, \Sigma_\pi)$ sur $\mathcal{U}_\pi$ comme suit : pour tout sommet π' de $\mathcal{D}$, on note $\Delta_{\pi'}^0$ l'espace des données de longueur $\lambda \in \Delta_{\pi'}$ qui satisfont

$$1 + \min(\lambda_{\alpha t}, \lambda_{\alpha b}) \geq \sum \lambda_\alpha \geq 1,$$

(où α_t, α_b sont définis par $\pi_t(\alpha_t) = \pi_b(\alpha_b) = \mathrm{d}$).

L'espace $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ est obtenu à partir de la somme disjointe des $\Delta^0_{\pi'} \times \Theta_{\pi'}$ (π' décrivant les sommets de $\mathcal{D}$) en identifiant pour chaque flèche γ: $\pi' \to \pi''$ une partie des bords de $\Delta^0_{\pi'} \times \Theta_{\pi'}$ et $\Delta^0_{\pi''} \times \Theta_{\pi''}$ par l'application linéaire (${}^tB_\gamma^{-1}$, ${}^tB_\gamma^{-1}$) traduisant l'étape correspondante de l'algorithme de Rauzy-Veech.

Notons $\mathcal{U}'_\pi$ l'union des j_α^{-1} (i ($\Delta^0_{\pi'} \times \Theta_{\pi'}$)), γ décrivant comme précédemment l'ensemble des chemins non orientés de $\mathcal{D}$ issus de π (et π' désignant l'extrémité libre de γ). Alors $\mathcal{U}'_\pi$ est un ouvert contenu dans $\mathcal{U}_\pi$, dont le complémentaire est de codimension 1 ; on a un revêtement

$$p : \mathcal{U}'_\pi \to \mathcal{M}(\mathcal{D})$$

tel que $p \circ j_\gamma^{-1}$ soit l'injection canonique de $\Delta^0_{\pi'} \times \Theta_{\pi'}$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, et qui présente $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ comme l'espace des orbites de l'action de $\mathrm{Mod}_0(M_\pi, \Sigma_\pi)$ dans $\mathcal{U}'_\pi$. On voit donc que $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ s'identifie à un ouvert connexe de $\widetilde{\mathcal{M}}(M_\pi, \Sigma_\pi, \kappa_\pi)$ de mesure pleine dans la composante connexe qui le contient. Le flot de Teichmuller sur $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ apparaît comme la suspension (à temps variable) de l'algorithme de Rauzy-Veech (ou plutôt de son extension naturelle).

4. Le flot de Teichmuller sur $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, dans la description précédente, appartient à une classe de flots pour lesquels on peut prouver le mélange exponentiel. Décrivons de façon sommaire cette classe. On se donne un ouvert connexe et relativement compact Δ dont le bord est constitué d'un nombre fini d'hypersurfaces lisses en position générale. On a une partition dénombrable

$$\Delta = \sqcup \Delta^{(l)} \quad \mathrm{mod}\ 0$$

et une transformation lisse

$$T : \sqcup \Delta^{(l)} \to \Delta$$

dont la restriction à chaque $\Delta^{(l)}$ est un difféomorphisme uniformément dilatant sur Δ. On se donne également une fonction lisse

$$r : \sqcup \Delta^{(l)} \to \mathbf{R}_+^*.$$

On suppose enfin qu'on dispose d'un ouvert $\hat{\Delta}$, d'une application $\pi : \hat{\Delta} \to \Delta$ et d'une application $\hat{T} : \pi^{-1}(\sqcup \Delta^{(l)}) \to \hat{\Delta}$ qui est une extension de T par π et contracte uniformément les fibres. Ces applications doivent satisfaire une condition technique que nous n'expliciterons pas ici.

Ces données permettent de construire un semi-flot de la façon suivante : dans l'espace

$$\hat{\Delta}_r = \{(y, s),\ y \in \sqcup \hat{\Delta}^{(l)},\ 0 \leq s \leq r(\pi y)\}$$

on identifie $(y, r(\pi y))$ et $(\hat{T}y, 0)$ et on définit

$$\hat{T}_t(y, s) = (y, s + t).$$

Ce semi-flot est donc la suspension de l'extension $\hat{T}$ de T avec temps de retour r.

Pour obtenir le mélange exponentiel de $\hat{T}_t$, plusieurs hypothèses sont nécessaires :

— r est minorée ;

— r est exponentiellement intégrable, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $e^{\sigma r}$ est intégrable ;

— r n'est pas cohomologue à une fonction localement constante ; plus précisément, on ne peut écrire r sous la forme

$$r = \psi + \Phi \circ T - \Phi,$$

où Φ est de classe C^1 sur Δ et ψ est constante sur chaque $\Delta^{(l)}$;

— une condition de distortion bornée sur r et le logarithme du jacobien de T est satisfaite ; plus précisément, si $h^{(l)}$ est la branche inverse de T à valeurs dans $\Delta^{(l)}$, la fonction $r \circ h^{(l)}$ et le logarithme du jacobien de $h^{(l)}$ ont une dérivée uniformément majorée sur Δ.

Ces conditions garantissent le mélange exponentiel pour le flot $\hat{T}_t$. La preuve est basée sur des idées de Dolgopyat, en suivant de près les développements accomplis par Baladi et Vallée.

5. Disposant de ce résultat abstrait de mélange exponentiel, il s'agit de voir que le flot de Teichmuller sur $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ vérifie les hypothèses requises.

Dans la présentation comme suspension qui en a été donnée plus haut, le temps de retour n'est pas minoré et les conditions de distorsion ne sont pas satisfaites. Il faudra donc diminuer la section transverse qui sert de base dans le modèle de suspension ; il est facile de voir qu'on obtient ainsi un temps de retour minoré et un contrôle de la distorsion ; mais on a augmenté le temps de retour et il faut conserver l'intégrabilité exponentielle. Qu'on puisse le faire repose sur des estimations « diophantiennes » sur l'algorithme de Rauzy-Veech qui sont d'un intérêt indépendant et que nous présentons maintenant.

Pour $q \in \mathbf{R}_+^{\mathcal{A}}$, π un sommet de $\mathcal{D}$, définissons

$$\Delta_{\pi, q} = \{\lambda \in \Delta_\pi, \langle \lambda, q \rangle < 1\}.$$

Soit γ un chemin orienté dans $\mathcal{D}$ issu de π, d'extrémité π'. Notons $\Delta_{\pi, q}(\gamma)$ l'ensemble des $\lambda \in \Delta_{\pi, q}$ dont le développement en fraction continue commence par γ. On a

$$\Delta_{\pi, q}(\gamma) = {}^tB_\gamma(\Delta_{\pi', B_\gamma q}).$$

Si Γ est un ensemble de chemins tous issus de π, on posera

$$P_{\pi, q}(\Gamma) = \frac{\mathrm{Leb}\,(\sqcup_\Gamma \Delta_{\pi, q}(\gamma))}{\mathrm{Leb}\,(\Delta_{\pi, q})}.$$

Ceci étant, soit $q \in \mathbf{R}_+^A$, soient $0 \leq m \leq M$ des entiers et A' une partie de A, non vide et distincte de A. Notons $\Gamma_{q, A'}(m, M)$ l'ensemble des chemins orientés γ issus de π qui vérifient

$$\max_A (B_\gamma q)_\alpha > 2^M \max_A q_\alpha$$
$$\max_{A'} (B_\gamma q)_\alpha < 2^{M-m} \max_A q_\alpha .$$

L'estimation cruciale est la suivante : il existe des constantes C, θ ne dépendant que de $\#A$ (mais pas de q, m, M) telles qu'on ait

$$P_{\pi, q}(\Gamma_{q, A'}(m, M)) \leq C\,(m + 1)^\theta\, 2^{-m}.$$

Il est essentiel ici d'obtenir cette estimation uniformément en $q \in \mathbf{R}_+^A$, malgré que les densités relatives des différentes probabilités $P_{\pi, q}$ ne sont pas uniformément bornées. La preuve est assez délicate : on montre cette estimation, ainsi que 3 autres estimations de même nature mais dont l'énoncé est un peu plus technique, par récurrence sur le cardinal de l'alphabet A.

La même méthode avait été auparavant mise en œuvre par Avila et Viana dans leur démonstration de la simplicité des exposants de Lyapunov pour le cocycle de Kontsevich-Zorich.

Missions, Invitations, Conférences

11/07-15/07/05 : Coorganisateur d'un workshop de Systèmes Dynamiques à Oberwolfach (Allemagne).

28/07/05 : Une conférence lors du « Colloquio Brasileiro de Matematica » à Rio de Janeiro (Brésil).

04/08-10/08/05 : Réunion internationale de Systèmes Dynamiques à Angra dos Reis (Brésil), 1 conférence.

15/08-19/08/05 : Colloque de Systèmes Dynamiques à San Pedro de Atacama (Chili), 1 conférence.

16/09-18/09/05 : Réunion de la Société Européenne de Mathématiques à Barcelone (Espagne), 1 conférence.

11/10/05 : Coorganisateur de la journée commune entre les Académies des Sciences françaises et brésiliennes à Paris.

14/11/05 : 1 conférence lors de la réunion « ECCS 05 » sur les systèmes complexes à Paris.

30/03/06 : 1 conférence de vulgarisation à Nancy.

5/04-15/04/06 : 3 conférences dont la Awon Memorial lecture à l'Université Postech de Pohang (Corée du Sud).

9/05/06 : 1 conférence à l'Université de Cergy-Pontoise lors d'un Colloque à l'occasion des 70 ans d'Adrien Douady.

22/05-24/05/06 : Mini-cours de 3 conférences à Rennes lors de la session « État de la recherche » intitulée « Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux ».

18/06/06 : Séminaire Bourbaki : « Ensembles de Julia de mesure positive et disques de Siegel des polynômes quadratiques [d'après X. Buff et A. Chéritat] ».

Publications

— Some remarks and questions on *SL* (2, **R**) cocycles, in Modern Dynamical Systems and Applications, 447-458, Cambridge University Press (2004).

— Avec S. Marmi et P. Moussa, The cohomological equation for Roth-type interval exchange maps, Journal of the American Math. Soc. 18 (2005), 823-872.

— Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré, texte d'une conférence prononcée à la BNF le 13 avril 2005, Gazette de la SMF, n° 107 (janvier 2006).