Théorie des Nombres

M. Don ZAGIER, professeur

Cours : Périodes des formes modulaires (suite)

Rappelons brièvement la théorie classique des périodes des formes modulaires holomorphes, d'abord dans le cas le plus simple du groupe modulaire $\Gamma_1 = PSL_2(\mathbb{Z})$. Pour $k \in \mathbb{Z}_{>1}$ on note par V_{2k} l'espace vectoriel des polynômes $P(X)$ de degré $\leq 2k-2$, muni de l'opération $|_{2\text{-}2k}$ de $G = PSL_2(\mathbb{R})$, où $P|_{2\text{-}2k}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est le polynôme $X \mapsto (cX+d)^{2k-2}P(\frac{aX+b}{cX+d})$. À une forme parabolique f de poids $2k$ sur Γ_1 on associe le *polynôme des périodes* $r(f) \in V_{2k}$, défini par

$$r(f)(X) \;=\; \int_0^\infty f(z)\,(z-X)^{2k-2}\,dz\,, \tag{1}$$

où l'intégrale est prise sur un chemin raisonnablement lisse dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$. Le groupe Γ_1 est engendré par les éléments $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec les relations $S^2 = U^3 = 1$, où $U = TS = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et la modularité de la forme f implique que $r(f)$ appartient au sous-espace

$$W_{2k} \;=\; \left\{P \in V_{2k} \mid P|(1+S) \;=\; P|(1+U+U^2) \;=\; 0\right\} \tag{2}$$

de V_{2k}. (Ici $P\,|(1+S) := P + P|_{2-2k}\,S$ et de même pour $P\,|(1+U+U^2)$.) Si on note par $r^\pm(f)$ les parties symétrique et antisymétrique de $r(f)$ par rapport à l'involution $P(X) \mapsto X^{2k-2}P(X^{-1})$, alors les applications $r^\pm$ donnent des isomorphismes de $S_{2k}(\Gamma_1)$ en W^+_{2k} et $W^-_{2k}\,/\,\langle P^0_k\rangle$, où $P^0_k(X) = X^{2k-2} - 1$. De plus, un résultat de Manin, dont une démonstration basée sur la méthode de Rankin a été donnée dans le cours précédent (voir résumé de cours 2002-2003), dit que si f est une fonction propre pour l'action des opérateurs de Hecke, alors $r^\pm(f)$ sont, à des constantes transcendantes $\omega^\pm_f$ près, des polynômes à coefficients algébriques. Par exemple, pour $k = 6$ on a $W^-_{2k} = \langle X^{10} - 1, X^8 - 3X^6 + 3X^4 - X^2\rangle$ et le polynôme des périodes antisymétrique de la forme $\Delta(z) = e^{2i\pi z} \prod (1 - e^{2i\pi nz})^{24} \in S_{12}(\Gamma_1)$ est donné par

$$\frac{r^-(\Delta)(X)}{\omega^-_\Delta} \;=\; -\frac{36}{691}(X^{10}-1) + X^8 - 3X^6 + 3X^4 - X^2 \tag{3}$$

pour une certaine constante $\omega^+_\Delta \in i\mathbb{R}$.

Pour des sous-groupes discrets $\Gamma \subset G$ autres que Γ_1, le polynôme $r(f)$ est remplacé par un *cocycle* $\gamma \mapsto r_\gamma(f)$ à valeurs dans la représentation V_{2k} de Γ, donné explicitement par

$$r_\gamma(f)(X) = \int_{\gamma^{-1}\infty}^{\infty} f(z)\,(z - X)^{2k-2}\,dz,$$

et l'espace $W_{2k}/\langle P_k^0\rangle$ est remplacé par un sous-groupe $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, V_{2k})$ du premier groupe de cohomologie de Γ à coefficients dans V_{2k}.

Dans le cours de l'année 2002-2003, la théorie des périodes des formes modulaires holomorphes a été présentée et développée dans plusieurs directions. Le cours de cette année qui en était la suite et la fin était centré autour de deux thèmes : les liens entre les périodes des formes modulaires et les corps quadratiques réels, et la généralisation de la théorie au cas des formes modulaires non-holomorphes de Maass. La première direction est plus arithmétique, avec des applications à des questions comme les valeurs spéciales des fonctions zêta. Le deuxième thème, qui est plutôt analytique, mène à une description purement cohomologique des formes de Maass et a des liens intéressants avec un système dynamique étudié par D. Mayer et avec la fonction zêta de Selberg. Nous décrivons maintenant ces deux directions de façon plus détaillée.

Liens entre les périodes et les corps quadratiques réels

Il est très naturel de s'attendre à ce que la théorie des formes modulaires pour les sous-groupes de $PSL_2(\mathbb{R})$ soit étroitement liée à l'arithmétique des extensions de degré 2 de $\mathbb{Q}$. Dans le cas des extensions imaginaires ce lien est bien connu : si K est un corps quadratique imaginaire, alors la valeur du quotient de deux formes modulaires (à coefficients de Fourier rationnels) de même poids en un point appartenant à $K \cap \mathcal{H}$ est un nombre algébrique et engendre une extension abélienne du corps K ; c'est la théorie classique de la multiplication complexe. Pour le cas des corps quadratiques réels, le lien existe aussi mais ce sont maintenant les périodes des formes modulaires plutôt que leurs valeurs qui le donnent. Nous en décrivons ici certains aspects.

Polynômes attachés aux formes quadratiques réduites. Commençons par quelques définitions et par une construction très élémentaire. Soit D un entier positif, non-carré, et congru à 0 ou 1 modulo 4 ; un tel D est le discriminant d'un ordre dans un corps quadratique réel $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. On considère l'ensemble $\mathcal{Q}_D$ des fonctions quadratiques $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et discriminant $b^2 - 4ac = D$. C'est un ensemble infini sur lequel Γ_1 opère par $Q \mapsto Q\,|_{-2}\gamma$; l'ensemble $\mathcal{Q}_D / \Gamma_1$ des classes d'équivalence par Γ_1 est un ensemble fini, qui dans le cas où D est le discriminant de K (« discriminant fondamental ») s'identifie de façon naturelle au groupe des classes d'idéaux de K. Il y a deux sous-ensembles finis de $\mathcal{Q}_D$ qui d'après la théorie de réduction des formes quadratiques contiennent chacun au moins un élément de chaque classe d'équivalence $\mathcal{A} \in \mathcal{Q}_D / \Gamma_1$: les formes *réduites* $\mathcal{Q}_D^r$ avec $a, c > 0 > a + b + c$, et les formes *simples* $\mathcal{Q}_D^S$ avec $a > 0 > c$. Par exemple, pour $D = 5$ on trouve $\mathcal{Q}_D^r = \{X^2 - 3X + 1\}$ et $\mathcal{Q}_D^s = \{X^2 + X - 1, X^2 - X - 1\}$. Si on pose maintenant pour k pair

$$P_{k,D}(X) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D^s} Q(X)^{k-1}, \qquad Q_{k,D}(X) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D^r} Q(X)^{k-1} \quad \in V_{2k},$$

alors un calcul simple montre que $P_{k,D} = Q_{k,D}|(-U + U^2)$ et $P_{k,D}|S = -P_{k,D}$. Il s'ensuit que le polynôme $P_{k,D}$ appartient au sous-espace W_{2k} défini par l'équation (2) et donc, d'après ce qu'on a expliqué ci-dessus, qu'il peut s'écrire de façon unique comme la somme d'un polynôme des périodes antisymétriques $r^-(f)$ et d'un multiple de P_k^0. Par exemple, pour $D = 5$ et $k = 6$ on trouve

$$P_{6,5}(X) = (X^2 + X - 1)^5 + (X^2 - X - 1)^5 = 2X^{10} + 10X^8 - 30X^6 + 30X^4 - 10X^2 - 2$$

et la comparaison avec (3) montre qu'on a $P_{6,5} = (10/\omega_\Delta^-)\, r^-(\Delta) + (1742/691)\, P_6^0$. On peut se demander ce que signifient du point de vue arithmétique la forme parabolique $(10/\omega_\Delta^-)\, \Delta$ et le nombre rationnel 1742/691 qui interviennent dans cette formule.

La forme parabolique $f_{k,D}$. Définissons pour D comme ci-dessus et k pair une fonction $f_{k,D}$ par la formule

$$f_{k,D}(z) = \frac{D^{k-1/2}}{2i\pi\binom{2k-2}{k-1}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D} \frac{1}{Q(z)^k} \qquad (z \in \mathcal{H}). \tag{4}$$

C'est une forme parabolique de poids $2k$. La définition peut être vue comme l'analogue de celle de la série d'Eisenstein $G_{2k}(z) = \Sigma'(mz + n)^{-2k}$, mais au lieu de prendre la somme des puissances $(-2k)$-ièmes des fonctions *linéaires* en z à coefficients entiers, on prend la somme des puissances $(-k)$-ièmes des fonctions *quadratiques* en z à coefficients entiers et avec un discriminant fixé. Le polynôme des périodes antisymétriques de $f_{k,D}$ est donné explicitement par

$$r^-(f_{k,D})(X) = P_{k,D}(X) + \frac{B_k}{B_{2k}} H_k(D)\, P_k^0(X) \tag{5}$$

(Kohnen-Zagier), où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli et $H_k(D)$ le « nombre de classes généralisé » de Henri Cohen (voir ci-dessous). Cette formule est intéressante à plusieurs égards, comme le montre la discussion qui suit.

Formes paraboliques à périodes rationnelles. Dans le cours de l'année précédente, on avait souligné l'intérêt de trouver les formes modulaires avec $r^+(f)$ ou $r^-(f)$ appartenant à l'espace $W_{2k}^{\pm}(\mathbb{Q})$ des polynômes en $W_{2k}^{\pm}$ à coefficients rationnels : les ensembles $S_{2k}^{\pm}(\mathbb{Q})$ de telles formes donnent à $S_{2k}(\Gamma_1)$ des $\mathbb{Q}$-structures différentes de la structure $S_{2k}(\mathbb{Q}) = S_{2k}(\Gamma_1) \cap \mathbb{Q}[[q]]$ usuelle, qui ont des propriétés arithmétiques très intéressantes. La fonction $f_{k,D}$ nous donne un exemple provenant des corps quadratiques d'une forme en $S_{2k}^-(\mathbb{Q})$ pour k pair. En considérant plus généralement des combinaisons linéaires des fonctions $f_{k,D,\mathcal{A}}$ définies comme $f_{k,D}$, mais avec la sommation dans (4) s'étendant seulement sur les formes Q appartenant à une classe d'équivalence $\mathcal{A} \in \mathcal{Q}_D/\Gamma_1$ donnée, on obtient des formes paraboliques explicites qui engendrent les espaces $S_{2k}^+(\mathbb{Q})$ et $S_{2k}^-(\mathbb{Q})$ pour tout k.

Applications aux valeurs des fonctions zêta. Selon H. Cohen, les nombres $H_k(D)$ qui interviennent en (5) ont une double interprétation : pour D fixé, ce sont les valeurs en $s = 1 - k$ ($k = 2, 4, 6, \ldots$) de la série L associée à D (pour D fondamental, c'est le prolongement analytique à tout $s \in \mathbb{C}$ de la série de Dirichlet $L(s, \chi_D) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \chi_D(n)\, n^{-s}$, où χ_D est le caractère quadratique associé au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$), et pour k fixé ce sont les coefficients de Fourier d'une forme modulaire $\mathcal{H}_k(z) = \Sigma H_k(D) q^D$ de poids $k + \frac{1}{2}$ sur $\Gamma_0(4)$. Ce sont donc des nombres très intéressants du point de vue de l'arithmétique. La formule (5) et la description connue de l'image de $S_{2k}(\Gamma_1)$ dans W_{2k}^- (Kohnen-Zagier ; voir résumé de cours de l'année précédente) donnent des formules explicites pour ces nombres. Le cas le plus simple est la formule

$$L(-1, \chi_D) \;=\; H_2(D) \;=\; -\frac{1}{5} \sum_{\substack{|n|<\sqrt{D} \\ n \equiv D \pmod 2}} \sigma_1\Big(\frac{D-n^2}{4}\Big) \tag{6}$$

(où $\sigma_1(m)$ note comme d'habitude la somme des diviseurs positifs d'un entier m), due à Siegel.

Lien avec les groupes modulaires de Hilbert. Le lien le plus évident entre les formes modulaires et les corps quadratiques réels est donné par la théorie des formes modulaires de Hilbert ; ce sont des fonctions holomorphes $F(z_1, z_2)$ à deux variables $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ ayant une loi de transformation par rapport au groupe $SL_2(\mathcal{O}_K)$ analogue à la transformation usuelle des formes modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Siegel avait trouvé la formule (6) en considérant la restriction à $z_1 = z_2$ de la série d'Eisenstein $G_{k,K}$ de poids k pour $SL_2(\mathcal{O}_K)$. On peut donc se demander s'il y a un lien direct entre les séries d'Eisenstein-Hilbert et les formes $f_{k,D}$. Cette relation existe et est donnée (pour D fondamental, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$) par la formule

$$G_{k,K}(z,z) \;=\; \rho_{2k-1}(f_{k,D})(z) \;+\; \frac{B_k\, H_k(D)}{B_{2k}}\, G_{2k}(z)\,,$$

où G_{2k} est la série d'Eisenstein de poids $2k$ sur $SL_2(\mathbb{Z})$ et ρ_s ($s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$) l'endomorphisme $\rho_s = \Sigma_{n=1}^{\infty} T(n) n^{-s}$ de $S_{2k}(\Gamma_1)$ qui multiplie les formes propres pour les opérateurs de Hecke par la valeur de leur fonction L en s. Les résultats d'algébricité de Manin déjà mentionnés impliquent que l'endomorphisme ρ_{2k-1} de $S_{2k}(\Gamma_1)$ envoie $S_{2k}^-(\mathbb{Q})$ dans $S_{2k}(\mathbb{Q})$.

Lien avec les périodes hyperboliques. À côté des périodes usuelles d'une forme modulaire $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$, définies comme les coefficients du polynôme (1), on a aussi les *périodes hyperboliques*

$$r_{\mathcal{A}}(f) \;=\; \int_{z_0}^{\gamma_Q(z_0)} f(z)\, Q(z)^{k-1}\, dz\,, \tag{7}$$

où $\mathcal{A} \in \mathcal{Q}_D / \Gamma_1$ est une classe d'équivalence de fonctions quadratiques, Q un élément quelconque de cette classe, γ_Q un générateur fixé du stabilisateur de Q dans Γ_1 et z_0 n'importe quel point du demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$; la modularité de f implique que cette définition est indépendante des choix de Q et de z_0. En utilisant les fractions continues, on montre que $r_{\mathcal{A}}(f)$ s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes usuelles de f. Le lien avec $f_{k,D}$, ou plutôt avec la fonction plus générale $f_{k,D,\mathcal{A}}$ définie plus haut, est donné par

$$r_A(f) \;=\; 2^{2k-2}\,(f,\,f_{k,D,\mathcal{A}}) \qquad \text{pour tout} \;\; f \in S_{2k}(\Gamma_1),$$

où (,) est le produit scalaire de Petersson.

Lien avec les formes modulaires de poids demi-entier. On a déjà mentionné que les nombres $H_k(D)$ qui apparaissent en (5) sont, pour k fixé et D variable, les coefficients de Fourier d'une forme modulaire de poids $k + \frac{1}{2}$. Ce phénomène s'étend en fait à toute la formule (5) : les formes modulaires $f_{k,D}$ sont les coefficients de Fourier d'une forme modulaire à deux variables $\Sigma f_{k,D}(z)\, e^{2i\pi Dz'}$, de poids $2k$ par rapport à z et de poids $k + \frac{1}{2}$ par rapport à z', qui est la « fonction noyau » de la correspondance de Shimura entre les formes modulaires de poids entier et de poids demi-entier. Les polynômes $P_{k,D}(X)$ sont donc aussi les coefficients d'une forme modulaire de poids demi-entier ; c'est un cas particulier de la théorie des séries thêta associées aux formes quadratiques indéfinies qui sera traitée dans le cours de l'année prochaine.

Lien avec les sommes infinies de fonctions quadratiques. Ayant commencé cette discussion par une construction tout à fait élémentaire, terminons-la par une autre. Pour tout discriminant positif D et tout nombre réel x on pose

$$A_D(x) \;=\; \sum_{\substack{a,\,b,\,c\in\mathbb{Z},\; b^2-4ac=D \\ a<0<ax^2+bx+c}} (ax^2+bx+c),$$

c'est-à-dire, $A_D(x)$ est la somme de $Q(x)$ pour tout $Q \in \mathcal{Q}_D$ dont le graphe est une parabole qui dépasse l'axe réel dans un intervalle fini qui contient le nombre donné x. Cette somme, infinie en général, est toujours convergente (ce n'est pas totalement évident) et est même finie pour x appartenant à $\mathbb{Q}$; par exemple, pour $D = 5$ et $x = \frac{1}{3}$ les $Q \in \mathcal{Q}_5$ qui contribuent à la sommation sont les fonctions $-X^2 + X + 1$, $-X^2 - X + 1$, $-5X^2 + 5X - 1$ et $-11X^2 + 7X - 1$ et la valeur de $A_D(x)$ est $\frac{11}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} = 2$. La propriété remarquable de ces fonctions $A_D(x)$ est qu'elles sont toujours *constantes* : on a pour tout D et pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'identité

$$A_D(x) = -5H_2(D) \tag{8}$$

où $H_2(D) = L(-1, \chi_D)$ est le nombre de Cohen défini plus haut. Le cas $x = 0$ de cette formule coïncide avec la formule (6) de Siegel. Si on définit plus généralement pour tout k pair et tout discriminant positif D une fonction $A_{k,D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$A_{k,D}(x) \;=\; \sum_{\substack{a,\,b,\,c\in\mathbb{Z},\; b^2-4ac=D \\ a<0<ax^2+bx+c}} (ax^2+bx+c)^{k-1}, \tag{8}$$

(il existe aussi une version pour les fonctions quadratiques restreintes à une classe d'équivalence fixée, et où k peut avoir n'importe quelle parité), alors la formule (8) pour $k = 2$ s'étend au cas $k = 4$, puisqu'on a $A_{4,D}(x) = H_4(D)$ pour tout D et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour $k > 4$, par contre, la fonction $A_{k,D}$ n'est plus constante, mais elle a toujours une structure très particulière : par exemple, pour $k = 6$ on a

$$A_{6,D}(x) \;=\; -\frac{65}{691}\,H_6(D) \;+\; \delta(D)\,\Phi(x) \tag{9}$$

avec un facteur $\delta(D)$ qui ne dépend que de D et une fonction $\Phi(x)$ qui ne dépend que de x. Tous ces résultats, bien qu'ils possèdent des démonstrations totalement élémentaires, sont étroitement liés aux propriétés des formes modulaires et aux résultats que nous avons discutés ici. Par exemple, la fonction $\Phi(x)$ dans (9) est un multiple de $\Sigma n^{-11}\tau(n)\cos(2\pi nx)$, où $\tau(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de la forme parabolique $\Delta \in S_{12}(\Gamma_1)$, et le nombre $\delta(D)$ est le D-ième coefficient de Fourier de la forme modulaire de poids $6\frac{1}{2}$ attachée à Δ par la correspondance de Shimura. Il y a aussi un lien avec la théorie déjà mentionnée des séries thêta associées aux formes quadratiques indéfinies.

Périodes des formes modulaires de Maass

Sur une variété riemannienne X il existe un opérateur différentiel canonique Δ, le *laplacien*, agissant sur les fonctions lisses $f : X \to \mathbb{C}$. Dans le cas où X est compact, on sait que cet opérateur a un spectre discret $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ avec $\lambda_i \to \infty$ et avec des fonctions propres f_0 (= constante), f_1, f_2, ... qui forment une base orthonormale de $L^2(X)$. L'étude de ces valeurs et fonctions propres est l'un des problèmes de base de la géométrie riemannienne. Dans le cas où $X = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ pour un sous-groupe $\Gamma \subset G$ discret et de covolume fini, le laplacien est donné par la formule $\Delta = -y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, où $z = x + iy$ est la coordonnée dans le revêtement $\mathcal{H}$ de X, et les fonctions propres pour Δ s'appellent les « formes de Maass » (Maass wave forms, Maass'sche Wellenformen) par rapport au groupe Γ. Une telle forme est donc une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ satisfaisant aux propriétés $f(\gamma z) = f(z)$ ($\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathcal{H}$) et $\Delta f = \lambda f$ pour un nombre réel et positif λ. Si le sous-groupe Γ de G n'est pas cocompact, il faut rajouter une condition de décroissance rapide aux pointes pour avoir un spectre discret. Dans ce cas, la forme de Maass aura un développement de Fourier de la forme

$$f(z) \;=\; \sqrt{y}\,\sum_{n\neq 0} A_n\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)\,e^{2i\pi nx} \qquad (z = x+iy \in \mathcal{H}) \tag{10}$$

avec des coefficients $A_n \in \mathbb{C}$, où s (le « paramètre spectral ») est une solution de l'équation quadratique $s(1-s) = \lambda$ et où $K_{s-\frac{1}{2}}(t)$ est la fonction de Bessel usuelle. Pour $\Gamma = \Gamma_1$, par exemple, la première valeur propre est $\lambda_1 = 91{,}141345\cdots$ avec paramètre spectral correspondant $s_1 = \frac{1}{2} + 9{,}533695\cdots\, i$ et les coefficients de Fourier, normalisés par $A_1 = 1$, sont donnés par $A_2 = -1{,}068333\cdots$, $A_3 = -0{,}456197\cdots$, ... et $A_n = -A_{-n}$ (« forme de Maass impaire » ; la première forme paire correspond dans ce cas à la troisième valeur propre $\lambda_3 = 190{,}131547\cdots$).

Du point de vue de la théorie générale des formes automorphes, les formes modulaires classiques (holomorphes) et les formes de Maass jouent des rôles de la même importance et il faut les étudier toutes les deux. Il y a beaucoup de parallélismes entre les deux théories : par exemple, l'espace $\mathfrak{M}_s(\Gamma)$ des formes de Maass à paramètre spectral s est de dimension finie, il y a des opérateurs de Hecke T_n agissant sur cet espace et une base de fonctions propres pour ces opérateurs, et les coefficients de Fourier d'une fonction propre pour les T_n sont proportionnels aux valeurs propres. Mais au contraire du cas classique, où on possède des algorithmes explicites pour déterminer les dimensions des espaces des formes modulaires et les coefficients de Fourier des formes propres et où ces derniers sont des nombres algébriques, les questions correspondantes dans le cas des formes de Maass n'ont pas de solutions connues : pour le groupe modulaire Γ_1, par exemple, on ne connaît pas une seule valeur propre λ_i ou A_n / A_1 $(n > 1)$ exactement, et les valeurs données ci-dessus ne sont que des approximations numériques.

Dans cet état des choses, il est donc très souhaitable de trouver des nouveaux points de vue pour étudier les formes de Maass. Un tel point de vue nous est donné par un théorème remarquable découvert par J. Lewis en 1997 qui dit que les paramètres spectraux s correspondants aux formes de Maass paires pour le groupe modulaire Γ_1 sont caractérisés par le fait que l'équation fonctionnelle

$$\psi(X) \;=\; \psi(X+1) \,+\, X^{-2s}\,\psi(X^{-1}+1) \tag{11}$$

possède une solution holomorphe (et satisfaisant à des conditions de croissance convenables) dans le domaine $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. La théorie de cette connexion a été développée depuis cette date par Lewis et l'auteur et s'est avérée être l'analogue adéquate de la théorie des périodes des formes modulaires holomorphes. Nous l'expliquons maintenant de façon plus détaillée.

Descriptions différentes de la correspondance de Lewis. Nous commençons par expliquer dans quel sens l'équation fonctionnelle (11) peut se voir comme l'analogue dans le cadre des formes de Maass de la propriété définissante des polynômes des périodes des formes modulaires holomorphes. Pour cela, on remarque que pour $k > 1$ un polynôme $P(X)$ appartient à l'espace W_{2k} défini par (2) si et seulement si on a $P|\,(1 - US - U^2 S) = 0$, ou plus explicitement,

$$P(X) \;=\; P(X+1) \,+\, (X+1)^{2k-2}\,P\Big(\frac{X}{X+1}\Big)\,.$$

En fait, l'équation $P|(1 - US - U^2 S) = 0$ équivaut à $Q := P|(1 + S) = P|(1 + U + U^2)$, et pour $k > 1$ cela ne peut se produire que si Q s'annule, puisque Q serait invariant par S et par U et donc par tout Γ_1. Un argument analogue montre que P appartient au sous-espace $W_{2k}^{\pm}$ des polynômes des périodes symétriques ou antisymétriques si et seulement si on a

$$P(X) \;=\; P(X+1) \,\pm\, X^{2k-2}\,P\Big(1+\frac{1}{X}\Big)\,,$$

c'est-à-dire (pour le signe +), exactement l'équation (11) de Lewis avec $s = 1 - k$.

Or, dans le cas holomorphe, on connaît deux façons d'associer à une forme parabolique $f(z) = \Sigma a(n) e^{2i\pi nz}$ de poids $2k$ sur Γ_1 un polynôme $P = r\,(f)$ appartenant à l'espace W_{2k} :

(i) par la représentation intégrale (1), ou

(ii) en posant $P(z) = F(z) - z^{2k-2} F\,(-1/z)$ pour $z \in \mathcal{H}$, où $F(z) = \Sigma n^{1-2k} a(n) e^{2i\pi nz}$

(cf. le résumé de cours de l'année passée). On peut donc essayer de trouver des représentations analogues de la fonction ψ de Lewis pour les formes de Maass. Dans les deux cas c'est possible, mais beaucoup plus compliqué que dans le cas holomorphe :

(i) Lewis s'était déjà servi d'une représentation intégrale pour définir la fonction ψ associée à une forme de Maass paire sur Γ_1 :

$$\psi(X) = X \int_0^\infty \frac{f(iy)\, y^s\, dy}{(X^2 + y^2)^{s+1}} \qquad (\Re(X) > 0), \tag{12}$$

mais cette formule ne met en évidence ni la continuation analytique de ψ à $\mathbb{C}'$ (l'intégrale devient singulière pour X appartenant à l'axe imaginaire) ni la validité de l'équation fonctionnelle (11), et il n'est pas du tout clair comment se servir dans l'analyse de l'intégrale (12) de l'invariance de $f(z)$ par rapport à Γ_1 ou de l'équation différentielle $\Delta f = s\,(1-s) f$. Lewis avait démontré les propriétés de la fonction définie par (12) par une combinaison ingénieuse mais peu illuminante de transformations intégrales (de Laplace et de Hankel). Pour obtenir ces propriétés d'une manière plus naturelle, on remplace l'intégrand dans (12) par une autre expression qui a la même valeur quand f est une forme de Maass paire et l'intégrale est prise le long de l'axe réel, mais qui est maintenant une 1-forme différentielle *fermée*, de façon que l'on puisse déformer le chemin d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale. Cette nouvelle intégrale a la forme

$$\psi(X) = \int_0^\infty [f,\, R_X^s](z)\,, \tag{13}$$

où $R_X(z) = \dfrac{y}{(x-X)^2 + y^2}$ (avec $z = x + iy$ comme d'habitude) et où $[f, g]$ pour deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ différentiables quelconques est la *forme de Green*, définie comme la forme différentielle $[f, g] = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, g\, dz \,+\, f\, \dfrac{\partial g}{\partial \bar z}\, d\bar z$. Un calcul direct montre que $d([f,g])$ s'annule si f et g sont des fonctions propres pour Δ avec la même valeur propre, et aussi que $\Delta\,(R_X^s) = s\,(1-s) R_X^s$ et $R_{gX}(gz) = (cX + d)^2 R_X(z)$ pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$. On en déduit que la valeur de l'intégrale (13) pour une forme de Maass f de paramètre spectral s est indépendante du chemin d'intégration entre les pointes 0 et ∞, et que pour une forme de Maass paire (resp. impaire) sur Γ_1 la fonction $\psi(X)$ définie par (13) se prolonge à une fonction holomorphe dans tout $\mathbb{C}'$ et satisfait à l'équation (11) (resp. à la même équation avec le signe du dernier terme changé).

(ii) La deuxième façon de définir la fonction ψ est à l'aide de l'équation

$$\psi(z) = F(z) - z^{-2s} F(-1/z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \tag{14}$$

où $F : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la fonction holomorphe et périodique définie par $F(z) = \Sigma_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} A_n e^{2i\pi nz}$ pour $z \in \mathcal{H}$ et par $F(z) = -F(-z)$ pour $-z \in \mathcal{H}$, avec les coefficients A_n donnés par (10). (Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas pair, où $A_n = A_{-n}$.) Alors la périodicité de F entraîne, par un calcul élémentaire et amusant, la validité de l'équation fonctionnelle (11), et la difficulté consiste à montrer que la fonction ψ définie dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par (14) se prolonge au domaine plus grand $\mathbb{C}'$ si et seulement si la fonction donnée par (10) est invariante par $z \mapsto -1/z$ (et est donc une forme de Maass de paramètre spectral s sur Γ_1, la périodicité et l'équation différentielle requises étant automatiques pour une fonction de la forme (10)). Ceci se fait en utilisant la *série L*

$$L(f, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^{\rho}}$$

associée à la fonction (10). Cette série est, à un produit de fonctions Gamma près, égale à la transformée de Mellin de la restriction de la fonction f à l'axe imaginaire, et en utilisant ce fait, Maass a donné une caractérisation bien connue des formes de Maass à paramètre spectral s comme les séries de la forme (10) pour lesquelles la fonction $L(f, \rho)$ possède une continuation analytique et satisfait à une équation fonctionnelle d'un type particulier. Mais la fonction $L(f, \rho)$ est également, à un autre produit de fonctions Gamma près, égale à la transformée de Mellin de la restriction de la fonction F à l'axe imaginaire (positif ou négatif, puisque $F(-iy) = -F(iy)$), tandis que la transformée de Mellin de $\psi(\pm iy)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de deux valeurs de la transformée de Mellin de $F(\pm iy)$. Si on applique maintenant la formule d'inversion de Mellin pour écrire les restrictions de ψ à $\pm \mathcal{H}$ en termes de la fonction $L(f, \rho)$, on trouve que l'équation fonctionnelle de cette dernière qui équivaut à la modularité de f est exactement ce qui est nécessaire pour donner les *mêmes* représentations intégrales de ψ juste au-dessus et en dessous de l'axe réel positif, et donc de donner le prolongement analytique de ψ au domaine $\mathbb{C}'$.

Lien avec l'opérateur de transfert de Mayer et la fonction zêta de Selberg. D'après la formule de trace de Selberg, le spectre du laplacien est relié aux longueurs des géodésiques sur la variété riemannienne $X = \Gamma \setminus \mathcal{H}$. En particulier, Selberg a démontré que la *fonction zêta* définie par

$$Z_{\Gamma}(s) = \prod_{\gamma} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - N(\gamma)^{-s-m}\right) \qquad (\Re(s) \gg 0),$$

où le premier produit porte sur les éléments hyperboliques primitifs de Γ, a un prolongement méromorphe à tout $s \in \mathbb{C}$ et s'annule si s est un paramètre spectral pour le groupe Γ. En 1991, D. Mayer a trouvé une interprétation nouvelle et très intéressante de la fonction zêta de Selberg pour le cas $\Gamma = \Gamma_1$ à l'aide d'un certain « opérateur de transfert » $\mathfrak{L}_s$ associé à un certain système dynamique lié aux fractions continues. Cet opérateur est défini (d'abord pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, et puis par prolongement analytique) par la formule

$$\mathfrak{L}_s h(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{2s}}\, h\Big(\frac{1}{z+n}\Big) \qquad\qquad (z \in \mathbb{D},\ \ h \in H_s)\,, \tag{15}$$

où $\mathbb{D}$ est le disque $|z-1| < 3/2$ et H_s l'espace de Banach des fonctions holomorphes en $\mathbb{D}$ et continues en $\overline{\mathbb{D}}$, et le théorème de Mayer est la formule

$$Z_{\Gamma_1}(s) \;=\; \det\big(1 \;-\; \mathfrak{L}_s^2\big) \tag{16}$$

(déterminant au sens de Fredholm). Une démontration élémentaire de ce résultat, basée sur la théorie de réduction dans Γ_1, a été trouvée par Lewis et l'auteur et exposée dans le cours.

Il y a une relation très simple entre l'identité (16), l'énoncé de Selberg sur les zéros de $Z_\Gamma(s)$, et la théorie des périodes des formes de Maass. Mayer a démontré que l'opérateur $\mathfrak{L}_s$ est nucléaire ; ceci implique que les valeurs propres de $\mathfrak{L}_s$ tendent vite vers 0 et que le déterminant de Fredholm det $(1 - \mathfrak{L}_s^2)$ s'annule si et seulement si l'opérateur $\mathfrak{L}_s^2$ a un vecteur fixe dans H_s, c'est-à-dire, si et seulement si il existe une fonction $h \in H_s$ avec $\mathfrak{L}_s h = \pm h$. Mais il est évident par la définition même de l'opérateur $\mathfrak{L}_s$ qu'on a $\mathfrak{L}_s h(z) - \mathfrak{L}_s h\,(z+1)^{-2s} h\,(1/(z+1))$ pour tout $h \in H_s$, et cela implique que pour une fonction $h \in H_s$ avec $\mathfrak{L}_s h = \pm h$ la fonction $\psi(X) = h\,(X-1)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (11) de Lewis (ou à cette équation avec le signe du dernier terme changé, ce qui correspond à une forme de Maass impaire). Le fait que cette solution, définie au début uniquement dans le disque $|X-2| < 3/2$, se prolonge au domaine plus grand $\mathbb{C}'$ est une conséquence de la méthode de « bootstrapping » introduite dans le papier de Lewis et l'auteur au cours de la démonstration de la bijection entre les formes de Maass et les solutions de l'équation (11).

On peut résumer cette discussion par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{A. Longueurs des géodésiques sur } \Gamma_1\backslash\mathcal{H}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \boxed{\text{B. Spectre du laplacien } \Delta} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\boxed{\text{C. Spectre de l'opérateur } \mathfrak{L}_s} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{D. Solutions holomorphes de l'équation (11)}}
\end{tikzcd}$$

avec (A) et (B) reliés par la formule de trace de Selberg, (A) et (C) par la théorie des opérateurs de transfert, (B) et (D) par la théorie des périodes des formes de Maass, et (C) et (D) par la relation élémentaire $h(z) = \psi\,(z+1)$ entre les points fixes de $\mathfrak{L}_s$ et les solutions de (11). On obtient de cette façon une nouvelle preuve, indépendante de la formule de trace de Selberg, de la relation entre les longueurs des géodésiques et le spectre du laplacien pour la variété riemannienne $\Gamma/\mathcal{H}$.

Généralisation aux autres groupes et cohomologie. Enfin, on peut se demander comment se généralise la théorie des périodes des formes de Maass quand on remplace le groupe modulaire Γ_1 par un autre sous-groupe discret (cocompact ou non) de $G = PSL(2, \mathbb{R})$: l'équation fonctionnelle (11) a une forme très particulière qui dépend des générateurs de Γ_1, et il n'y a pas de façon évidente pour la modifier quand ce groupe change. Comme dans le cas classique, la solution à ce problème est donnée par la cohomologie. Plus explicitement, supposons que $0 < \Re(s) < 1$ et notons par V_s^ω (resp. V_s^∞) l'espace des vecteurs analytiques (resp. lisses) dans la représentation de la série principale de G avec paramètre s ; on peut prendre comme modèle pour V_s^ω ou V_s^∞ l'ensemble des fonctions analytiques ou lisses $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}$ qui sont homogènes de degré $-2s$ ($\Phi(tX, tY) = |t|^{-2s}\Phi(X, Y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$), avec l'opération évidente $\Phi \mapsto \Phi \circ g$ du groupe G. Le résultat principal, dû à Bruggeman, Lewis et l'auteur, est alors $\mathfrak{M}_s(\Gamma) \cong H^1(\Gamma ; V_s^\omega)$ dans le cas cocompact et

$$\mathfrak{M}_s(\Gamma) \;\cong\; H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma; V_s^{\omega/2}) \;\cong\; H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma; V_s^{\omega}, V_s^{\infty}) \tag{17}$$

dans le cas général, où $V_s^{\omega/2}$ est l'espace intermédiaire entre V_s^ω et V_s^∞ défini comme l'ensemble des fonctions $\Phi \in V_s^\infty$ qui sont analytiques en dehors d'un nombre fini de lignes, et où $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma ; V)$ et $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma ; V, V')$ sont définis pour des représentations $V \subseteq V'$ de Γ quelconque comme les sous-espaces de $H^1(\Gamma ; V)$ donnés par les cocycles $c : \Gamma \to V$ tels que $c(\gamma) \in V \,|\, (1-\gamma)$ ou $c(\gamma) \in V' \,|\, (1-\gamma)$ pour tout élément parabolique γ de Γ. Le lien entre ce théorème et la description des périodes des formes de Maass pour Γ_1 que nous avons donnée avant est le suivant : la condition de parabolicité implique qu'un élément de $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma_1 ; V_s^{\omega/2})$ peut être représenté par un cocycle $c : \Gamma_1 \to V_s^{\omega/2}$ qui s'annule sur le générateur T et qui est par conséquent complètement déterminé par sa valeur $\Psi = c(S)$ dans l'autre générateur S de Γ_1, et la fonction Ψ est liée à notre fonction ψ par $\Psi(X, Y) = |Y|^{-2s}\,\psi(X/Y)$ pour $X/Y > 0$ et $\Psi(X, Y) = -|Y|^{-2s}\,\psi(-Y/X)$ pour $X/Y < 0$.

Indiquons brièvement la démonstration des isomorphismes (17). Pour aller des formes de Maass aux groupes de cohomologie de Γ, nous attachons à une forme $f \in \mathfrak{M}_s(\Gamma)$ le cocycle ψ_f donné par

$$\psi_f(\gamma)(X,Y) \;=\; \int_{\gamma^{-1}z_0}^{z_0} [f,\, R^s_{X,Y}](z)\,,$$

où $R_{X,Y}(z) = Y^{-2}R_{X/Y}(z) = y/((xY - X)^2 + y^2Y^2)$ et $[f,g]$ est la 1-forme de Green introduite ci-dessus, et où z_0 est un point de base arbitraire mais fixé. Si z_0 est un point de $\mathcal{H}$, cet élément $\psi_f(\gamma)$ est analytique pour tout $\gamma \in \Gamma$, et on vérifie la condition de parabolicité $\psi_f(\gamma) \in V_s^\infty \,|\, (1-\gamma)$ pour un élément parabolique γ de Γ en laissant tendre z_0 vers la pointe fixée par γ. Si on prend pour z_0 une pointe de Γ (comme on l'a fait pour $\Gamma = \Gamma_1$ dans l'équation (13), où $z_0 = \infty$), on obtient directement un cocycle parabolique à valeurs dans $V_s^{\omega/2}$.

Pour aller dans l'autre sens, de la cohomologie aux formes de Maass, le pas essentiel est d'introduire un autre modèle pour les représentations de la série principale. On définit $\mathcal{P}_s^\omega$ comme l'ensemble des fonctions différentiables dans $\mathcal{H}$ qui sont des solutions de l'équation de Laplace $\Delta u = s\,(1-s)\,u$ dans un voisinage du bord de $\mathcal{H}$ et qui ont le comportement $u(x+iy) = \psi(x)\,y^s + O(y^{s+1})$ avec $\psi \in C^\omega(\mathbb{R})$ quand $y \to 0$. (Il faut modifier cette description près de l'infini ; si on travaille avec le modèle du plan hyperbolique donné par le disque au lieu du demi-plan de Poincaré, on peut éviter la nécessité de traiter un point du bord d'une façon spéciale). Alors l'application qui envoie $u(z)$ sur $\Psi\,(X, Y) = |Y|^{-2s}\,\psi(X/Y)$ donne un isomorphisme entre $\mathfrak{F}_s^\omega = \mathcal{P}_s^\omega/\mathcal{P}_s^0$ et V_s^ω, où $\mathcal{P}_s^0 \subset \mathcal{P}_s^\omega$ est l'espace des fonctions $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ à support compact, et il y a une formule explicite pour l'application inverse qui donne la fonction u associée à $\Psi \in V_s^\omega$ dans un voisinage de $\partial\mathcal{H}$ comme l'intégrale d'une certaine fonction holomorphe. On peut donc représenter un élément de $H^1(\Gamma, V_s^\omega)$ par une application $c : \Gamma \to \mathcal{P}_s^\omega$ qui est un cocycle modulo $\mathcal{P}_s^0$, c'est-à-dire, telle que $\tilde{c}\,(\gamma, \gamma') := c\,(\gamma\gamma') - c\,(\gamma)|\gamma' - c\,(\gamma') \in \mathcal{P}_s^0$ pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. L'application $\tilde{c}$ est alors un 2-cocycle à valeurs dans $\mathcal{P}_s^0$; si on l'évalue sur un 2-cycle $\Sigma\,[\gamma_i, \gamma'_i] \in H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ représentant la classe fondamentale (au moins dans le cas où Γ est cocompact et sans torsion), on obtient un élément $f_0 \in \mathcal{P}_s^0$ qui est unique à des combinaisons linéaires finies des fonctions de la forme $u\,|(1-\gamma)$ $(u \in \mathcal{P}_s^0, \gamma \in \Gamma)$ près. Il s'ensuit que la somme localement finie $f(z) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\, f_0(\gamma z)$ est indépendante de tous les choix qu'on a faits, et la propriété qui définit $\mathcal{P}_s^\omega$ implique que $\Delta f = s\,(1-s)\,f$. La fonction f est la forme de Maass recherchée.

Cours à l'École Normale Supérieure : « Bouillon mathématique »

Ce cours, qui a eu lieu cette année pour la deuxième fois, a pour but de présenter à un niveau aussi élémentaire que possible des idées et des résultats mathématiques, souvent peu connus même parmi les mathématiciens professionnels, qui sont intéressants tant en étant abordables sans grandes connaissances théoriques. Les thèmes traités cette année s'organisaient autour de la combinatoire. On a discuté surtout la méthode des fonctions génératrices et les applications de la théorie des représentations des groupes finis à des questions d'énumération diverses, notamment celle de l'énumération des arbres ou des graphes aux nombres de sommets et de cycles fixés.

Conférences invitées

Montpellier, novembre 2003 : *Le côté expérimental de la théorie des nombres*. Exposé dans le cycle de conférences pour la formation des enseignants du secondaire « Mathématiques et résolution de problèmes » de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Montpellier, novembre 2003 : *Périodes des formes de Maass et cohomologie*. Séminaire de théorie des nombres, Université de Montpellier.

Rennes, décembre 2004 : *Exemples nouveaux pour les conjectures de Beilinson*. Colloque, Université de Rennes.

Hamana, Japon, février 2004 : *Maass forms and cohomology*. Conference on Modular Forms and Related Topics.

Saclay, mars 2004 : *Spectre du Laplacien et une équation fonctionnelle*. Séminaire de physique mathématique.

Bar-Ilan, Israël, mars 2004 : *The amazing equation* $1 - x_i = x_{i-1}\, x_{i+1}$. Séminaire, Université de Bar-Ilan.

Rehovot, Israël, mars 2004 : *Theta series of indefinite quadratic forms*. Séminaire de théorie des représentations, Institut Weizmann.

Haifa, Israël, mars 2004 : *From modular forms to cohomology*. Elisha Netanyahu Memorial Lecture, conférence spéciale annuelle du Technion.

Mainz, Allemagne, mai 2004 : *Die mysteriöse Fünftermgleichung*. Colloque, Université de Mainz.

Chicago, États-Unis, mai 2004 : *Homology and Arithmetic* (3 exposés). Adrian Albert Lectures, conférences spéciales annuelles de l'Université de Chicago.

Bonn, Allemagne, juin 2004 : *Was ist die Zahlentheorie*? Conférence pour lycéens au Max-Planck-Institut für Mathematik.

Essen, Allemagne, juin 2004 : *Indefinite theta series*. Colloque, Université d'Essen.

Bonn, Allemagne, juin 2004 : $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, *binomial coefficients and surprising symmetries*. Séminaire de théorie des nombres, Max-Planck-Institut für Mathematik.

Bonn, Allemagne, juin 2004 : *Laplace operators, modular forms, and zeta functions*. Worshop « Noncommutative geometry and number theory », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Zürich, Suisse, juillet 2004 : *Some number theoretical applications of homological ideas*. Conférence « From classical to postmodern » pour le 40e anniversaire du Forschungsinstitut für Mathematik de l'École Polytechnique Fédérale.

Bonn, Allemagne, juillet 2004 : *Representation theory of finite groups* (2 exposés). Conférences pour membres de l'école doctorale « IMPRS », Max-Planck-Institut für Mathematik.

Nordfjordeid, Norvège, août 2004 : *Elliptic Modular Forms and their Applications* (8 exposés). Cours spécial pour jeunes chercheurs norvégiens et étrangers.

Autres Missions et Activités

Utrecht, Pays-Bas, septembre 2003 : Soutenance de thèse de mon étudiant Tobias Mühlenbruch (« Systems of automorphic forms and period functions »), Université d'Utrecht.

Oslo, Norvège, octobre 2003 et Paris, mars 2003 : Comité de sélection pour le Prix Abel de l'Académie Royale de Norvège.

Paris, décembre 2003 : membre du jury, habilitation de K. Belabas (« Contributions à l'algorithmique des corps de nombres »), Université Paris Sud, Centre d'Orsay.

Bonn, Allemagne, décembre 2003 : membre du « Fachbeirat » (comité scientifique international) de l'Institut Minerva « Emmy Noether » de l'Université de Bar-Ilan, Israël.

Publications et Prépublications

Applications of the representation theory of finite groups. Appendice au livre *Graphs on Surfaces and Their Applications* par S. Lando et A. Zvonkin, Encycl. of Math. Sciences **141**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2004), pp. 399-427.

Numerical verification of Beilinson's conjecture for K_2 of hyperelliptic curves (avec T. Dokchitser et R. de Jeu). À paraître dans Compositio Math, 38 pages.

Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values (avec K. Ihara et M. Kaneko). Preprint, MPI für Mathematik, 37 pages.

Integral solutions of Apéry-like recurrence equations. Preprint, MPI für Mathematik, 13 pages.